

IMPLEMENTACIÓN PRÁCTICA DE CONTROL DIGITAL EN UN PÉNDULO INVERTIDO CON ESP32 PARA ENSEÑANZA DE SISTEMAS DE CONTROL

PRACTICAL IMPLEMENTATION OF DIGITAL CONTROL IN AN ESP32-BASED INVERTED PENDULUM FOR CONTROL SYSTEMS EDUCATION

Antonio Navarrete Guzmán

Tecnológico Nacional de México / IT de Tepic, México
anavarrete@itteplic.edu.mx

Demian Leonardo De Alberti Brechlin

Tecnológico Nacional de México / IT de Tepic, México
deledealbertibr@itteplic.edu.mx

Carlos Alberto Vidrios Serrano

Universidad Autónoma de Nayarit, México
carlos.vidrios@uan.edu.mx

Cuauhtémoc Acosta Lúa

Universidad de Guadalajara, Centro Universitario de la Ciénega, México
cuauhtemoc.acosta@academicos.udg.mx

Recepción: 5/enero/2026

Aceptación: 26/abril/2026

Resumen

La enseñanza de control digital suele requerir equipos costosos o simulaciones poco realistas, lo que limita la formación práctica de los estudiantes. Este trabajo presenta la implementación de una plataforma didáctica basada en ESP32 para el control de un péndulo invertido, conformada por dos microcontroladores: uno dedicado a la simulación de la planta en tiempo real y otro a la ejecución de algoritmos de control. La comunicación analógica entre ambos permite reproducir fenómenos de laboratorio como ruido, saturación y retardos. Se implementaron y compararon dos enfoques: retroalimentación de estados y PD–PID en cascada, diseñados a partir del modelo continuo linealizado, discretizados y validados en Python antes de su despliegue embebido. Con un periodo de muestreo de 1 ms, ambos estabilizan el sistema; el PD–PID mejora el seguimiento en posición a costa

de mayor esfuerzo de control, mientras que la retroalimentación de estados resulta más eficiente computacionalmente.

Palabras Clave: Control digital, control PD-PID, ESP32, péndulo invertido, retroalimentación de estados.

Abstract

Teaching digital control often requires expensive equipment or oversimplified simulations, which limits students' practical training. This work presents the implementation of an educational platform based on the ESP32 for controlling an inverted pendulum, consisting of two microcontrollers: one dedicated to real-time plant simulation and the other to executing control algorithms. Analog communication between them reproduces laboratory-like conditions such as noise, saturation, and delays. Two approaches were implemented and compared: state feedback and cascaded PD–PID, both designed from the continuous linearized model, discretized, and validated in Python prior to embedded deployment. With a sampling period of 1 ms, both controllers successfully stabilize the system; the PD–PID provides improved position tracking at the cost of higher control effort, whereas state feedback is computationally more efficient. The reported results confirm the didactic viability of the proposal as a practical tool for digital control education.

Keywords: Digital control, ESP32, inverted pendulum, PD-PID control, state feedback.

1. Introducción

El control digital de sistemas dinámicos constituye un eje fundamental en la formación de ingenieros eléctricos, electrónicos, de control, mecánicos y de ciencias computacionales, dado que la mayoría de las aplicaciones modernas se implementan en plataformas embebidas de procesamiento discreto [Vásquez, 2024; de la Peña, 2022]. Sin embargo, la enseñanza de estos conceptos suele apoyarse principalmente en simuladores o entornos virtuales, lo que limita la comprensión de fenómenos prácticos como saturación, cuantización, ruido de medida y retardos de muestreo. Por otro lado, los equipos de laboratorio capaces de reproducir estas

condiciones reales suelen ser costosos, voluminosos y de difícil acceso para grupos numerosos de estudiantes, lo que reduce las oportunidades de aprendizaje experimental.

El péndulo invertido se ha consolidado como un sistema de referencia en la docencia del control, al representar de forma intuitiva los desafíos de estabilidad, regulación y control en tiempo real. Diversos trabajos han abordado su análisis mediante técnicas clásicas implementadas en PID, realimentación de estados, [Franklin, 2015], reguladores óptimos y enfoques modernos basados en aprendizaje por refuerzo, modos deslizantes [Nagarajan, 2023; Costanzo, 2025; Nguyen, 2024; Hernández, 2024], que exploran implementaciones digitales considerando fricción, latencias y esfuerzo computacional. De manera paralela, la literatura reciente ha impulsado el desarrollo de plataformas didácticas de bajo costo orientadas a fortalecer la enseñanza de sistemas de control. Diversos trabajos han incorporado microcontroladores en cursos universitarios para acercar a los estudiantes a experiencias prácticas [González, 2022; Jiménez, 2025; Márquez, 2023; Zavala, 2023].

En particular, el ESP32 ha demostrado ser una alternativa accesible y versátil para la implementación de prácticas de control digital [Bermúdez, 2023], mientras que otras propuestas abordan diseños modulares que buscan reducir costos y ampliar la accesibilidad a laboratorios experimentales [Rivas, 2024; Villaseñor, 2022]. Aun así, muchos de estos desarrollos no integran de forma completa los fenómenos reales de cuantización, saturación o retardo, ni articulan un enfoque pedagógico que facilite su aplicación directa en la enseñanza del control digital.

Con el propósito de superar estas limitaciones, el presente trabajo propone una plataforma experimental de bajo costo basada en el microcontrolador ESP32, concebida como herramienta didáctica integral. La solución se materializa en una tarjeta de circuito impreso (PCB) que integra dos microcontroladores: uno dedicado a la simulación en tiempo real de la planta del péndulo invertido y otro a la ejecución de los algoritmos de control. Esta arquitectura permite incorporar efectos de saturación, cuantización, filtrado y ruido, reproduciendo las condiciones de un entorno real sin comprometer la seguridad ni requerir equipamiento costoso. En este

contexto, se presentan el diseño, implementación y validación de la plataforma, junto con la comparación de dos estrategias de control: retroalimentación de estados y PD–PID en cascada. Ambas fueron diseñadas a partir del modelo continuo linealizado, discretizadas y verificadas inicialmente en Python antes de su implementación embebida. El desempeño de los controladores se evaluó mediante indicadores de estabilidad y esfuerzo de control, demostrando la viabilidad del ESP32 como herramienta para la enseñanza práctica del control digital, al permitir a los estudiantes interactuar con fenómenos reales y fortalecer la conexión entre teoría y aplicación.

2. Métodos

En el desarrollo del modelo matemático es necesario comprender tanto el fundamento físico como su formulación matemática, constituyendo una herramienta esencial para analizar la relación entre ambas representaciones. En este proceso resulta clave identificar las diferencias entre la descripción exacta no lineal de un sistema y su aproximación linealizada, así como los conceptos de controlabilidad que justifican la posibilidad de estabilizarlo mediante técnicas de retroalimentación. Este análisis no solo aporta rigor teórico, sino que también permite reconocer los alcances y limitaciones de las simplificaciones habituales en control digital, fortaleciendo la capacidad de los estudiantes para vincular teoría y práctica.

Modelo no lineal del péndulo invertido

El péndulo invertido se selecciona como caso de estudio, ya que constituye un sistema de referencia ampliamente utilizado en docencia e investigación de control. El sistema está compuesto por un carro de masa M que se desplaza horizontalmente, al cual se une un péndulo de masa m mediante una barra rígida de longitud l , medida desde el pivote hasta el centro de masa. La variable θ representa el ángulo del péndulo respecto a la vertical inestable (positivo hacia delante), x la posición del carro, y u la fuerza horizontal aplicada al carro. Este procedimiento es ampliamente documentado en textos clásicos de control moderno [Franklin, 2015]. Bajo las hipótesis estándar de barra rígida, ausencia de fricción y

ruedas sin deslizamiento, las ecuaciones de movimiento pueden expresarse en las Ecuaciones 1 y 2, donde g es la aceleración de la gravedad. Estas ecuaciones no lineales describen la dinámica exacta del sistema para cualquier valor de θ , en el equilibrio corresponde a cero, lo que caracteriza la posición vertical inestable.

$$(M + m)\ddot{x} + ml(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) = u \quad (1)$$

$$l\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos\theta - g\sin\theta = 0 \quad (2)$$

Modelo linealizado alrededor del equilibrio inestable

Para linealizar el sistema alrededor del equilibrio vertical se asume que el ángulo presenta variaciones pequeñas, de modo que su magnitud es mucho menor que un radian. Bajo esta hipótesis pueden aplicarse las aproximaciones habituales de ángulo pequeño, en las que las funciones seno y coseno se sustituyen por sus primeras aproximaciones, considerando valores cercanos a cero y a la unidad, respectivamente. Asimismo, se descartan los términos no lineales de orden superior. Con estas simplificaciones, las ecuaciones del modelo pueden expresarse en las Ecuaciones 3 y 4. Así, el modelo lineal se define en las Ecuaciones 5 y 6, donde los coeficientes del modelo dependen de los parámetros físicos del sistema.

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u \quad (3)$$

$$l\ddot{\theta} + \ddot{x} - g\theta = 0 \quad (4)$$

$$\ddot{x} = a_{41}\theta + b_4u \quad (5)$$

$$\ddot{\theta} = a_{21}\theta + b_2u \quad (6)$$

En particular, a_{21} está determinado por $(M + m)g/lM$, mientras que a_{41} , que se define como $-mg/M$, depende de la masa del péndulo y la masa del carro; por su parte b_2 corresponde a $-1/Ml$ y b_4 a la relación de $1/M$, son términos asociados a la acción del control sobre la dinámica angular y la dinámica longitudinal del carro. El modelo linealizado del péndulo invertido alrededor del equilibrio inestable se expresa en espacio de estados mediante la Ecuación 7, la cual representa la dinámica lineal del sistema, donde el vector de estados incluye el ángulo del péndulo, su velocidad angular, la posición del carro y su velocidad, respectivamente. La salida de interés corresponde a la posición del carro. En consecuencia, las

matrices de salida C y D se definen en la Ecuación 8; por su parte, las matrices de dinámica de los sistemas A y B son definidas en la Ecuación 9.

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad (7)$$

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0], \quad D = [0 \ 0] \quad (8)$$

$$A = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ a_{21} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ a_{41} \ 0 \ 0 \ 0], \quad B = [0 \ b_2 \ 0 \ b_4] \quad (9)$$

A partir del modelo linealizado descrito en las Ecuaciones 7 a 9, se evaluó la controlabilidad del sistema. Se verificó que dicha matriz tiene rango completo, lo que demuestra que el sistema es completamente controlable y, por lo tanto, es posible diseñar una ley de control por retroalimentación del estado para estabilizar el péndulo en la posición vertical.

Discretización del modelo

Para implementación digital con periodo de muestreo T_s , se aplicó el método de Euler explícito [Vásquez, 2024], el cual constituye una aproximación de primer orden. De esta manera, las matrices del modelo discreto se obtienen a partir de las matrices continuas mediante relaciones directas, donde la matriz de estado discreta A_d , se calcula como $I + T_s A$, la matriz de entrada B_d como $T_s B$, mientras que las matrices de salida permanecen sin cambios, es decir C_d es la misma que C y D_d es igual a D . Sustituyendo estas expresiones en el modelo en espacio de estados continuo se obtiene el modelo discreto (Ecuación 10).

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k, \quad y_k = C_d x_k \quad (10)$$

Los términos u_k , $\theta_{ref,k}$, θ_k , x_k y r_k , representan las versiones muestreadas en tiempo discreto de las señales de control, de referencia angular y del ángulo del péndulo, posición y referencia del carro, respectivamente.

Retroalimentación de estados

La primera estrategia de control corresponde a la retroalimentación de estados, enfoque ampliamente utilizado debido a su capacidad de asignar polos y bajo costo computacional. La ley de control adoptada se define en la Ecuación 11, donde K es el vector de ganancias de realimentación, al aplicar dicha ley al modelo discreto

(Ecuación 10), la dinámica en lazo cerrado queda descrita en la Ecuación 12. Los polos del sistema en lazo cerrado se ubicaron utilizando la función *place* de la librería Python-Control, siguiendo criterios de velocidad de respuesta, amortiguamiento y esfuerzo de control [de la Peña, 2022]. La retroalimentación de estados elimina el error transitorio frente a perturbaciones tipo impulso, sin embargo, no garantiza rechazo a perturbaciones constantes ni seguimiento exacto de referencias, lo que representa una limitación práctica.

$$u_k = -Kx_k \quad (11)$$

$$A_{cl} = A_d - B_d K \quad (12)$$

Control PD–PID en cascada

La segunda estrategia es un esquema en cascada PD–PID, común en aplicaciones industriales por su simplicidad y robustez. Se basa en la dinámica del sistema, donde el ángulo θ es rápido e inestable, y la posición del carro x evoluciona lentamente, lo que lleva a una estructura jerárquica de control en dos niveles:

- Lazo interno (PD): Estabiliza el ángulo θ alrededor de una referencia $\theta_{ref,k}$.
- Lazo externo (PID): Genera la referencia $\theta_{ref,k}$ para que el carro siga la posición deseada r_k .

Lazo interno – PD sobre θ

El subsistema de ángulo $(\theta, \dot{\theta})$ se estabiliza mediante una realimentación proporcional–derivativa definida en la Ecuación 13. Las ganancias K_θ y K_θ^d se seleccionan por ubicación de polos del modelo discreto, garantizando una dinámica rápida y amortiguada para el ángulo. De este modo, la acción del lazo interno es significativamente más rápida que la del lazo externo.

$$u = K_\theta^p (\theta_{ref,k} - \theta_k) + K_\theta^d \dot{\theta} \quad (13)$$

Análisis de estabilidad del lazo interno mediante Lyapunov

Para analizar la estabilidad del lazo interno se emplea el modelo linealizado del ángulo presentado en la Ecuación 6, asumiendo que θ_{ref} es constante y de pequeña magnitud, en este análisis se hace en tiempo continuo; en estas

condiciones, el error angular se define en la Ecuación 14, la cual al derivarse dos veces y sustituyendo la segunda derivada en la dinámica del ángulo dada por la Ecuación 6, se obtiene la expresión del error, Ecuación 15.

$$e_{\theta} = \theta_{ref} - \theta = -\theta \quad (14)$$

$$\ddot{e}_{\theta} = a_{21}e_{\theta} - b_2u \quad (15)$$

Se sustituye la ley de control (Ecuación 13) dentro de la dinámica del error de la Ecuación 15, obteniéndose la Ecuación 16. Para analizar la estabilidad del lazo interno, se propone la función de Lyapunov (Ecuación 17); derivando la función V con respecto al tiempo, se obtiene la Ecuación 18.

$$\ddot{e}_{\theta} = a_{21}e_{\theta} - b_2(K_{\theta}^p e_{\theta} + K_{\theta}^d \dot{e}_{\theta}) \quad (16)$$

$$V = \frac{1}{2}(K_p e_{\theta}^2 + \dot{e}_{\theta}^2), \quad K_p > 0 \quad (17)$$

$$\dot{V} = (K_p e_{\theta} + \ddot{e}_{\theta})\dot{e}_{\theta} \quad (18)$$

La Ecuación 19 se obtiene sustituyendo la dinámica del error (Ecuación 16) en la Ecuación 18. Para asegurar que $\dot{V}$ sea negativa semidefinida se utilizan las ganancias de la Ecuación 20; aplicando dichas ganancias dentro de la expresión de $\dot{V}$, se obtiene la Ecuación 21, la cual demuestra que V es positiva definida y $\dot{V}$ es negativa semidefinida, por lo que el lazo interno PD es asintóticamente estable para cualquier referencia angular constante.

$$\dot{V} = ((K_p + a_{21} - b_2 K_{\theta}^p)e_{\theta} - b_2 K_{\theta}^d \dot{e}_{\theta})\dot{e}_{\theta} \quad (19)$$

$$K_p + a_{21} - b_2 K_{\theta}^p = 0 \quad y \quad b_2 K_{\theta}^d = K_d > 0 \quad (20)$$

$$\dot{V} \leq -K_d \dot{e}_{\theta}^2 \quad (21)$$

Lazo externo – PID sobre x

Dado que el lazo interno es significativamente más rápido que la dinámica longitudinal del carro, durante la mayor parte de la evolución temporal se satisface la Ecuación 22. Al sustituirla en el modelo linealizado de la posición, se llega a la Ecuación 23, la cual indica que θ_{ref} actúa como una entrada virtual que modifica directamente la aceleración del carro. El lazo externo genera la referencia angular mediante el controlador PID definido en la Ecuación 24. Para esta expresión se

considera el error de posición definido como la diferencia entre la referencia r_k y la posición del carro, tal como se define en la Ecuación 25.

$$\theta \simeq \theta_{ref} \quad y \quad \dot{\theta} \simeq 0 \quad (22)$$

$$\ddot{x} \simeq a_{41}\theta_{ref} \quad (23)$$

$$\theta_{ref,k} = K_x^p e_x + K_x^i z + K_x^d \dot{x} \quad (24)$$

$$e_x = r - x \quad (25)$$

El integrador asociado al lazo externo se define mediante la actualización dada en la Ecuación 26. Aunque el análisis del lazo externo se desarrolla en tiempo continuo, el estado integrador se representa en forma discreta como z_k , en concordancia con su implementación digital y con el período de muestreo T_s .

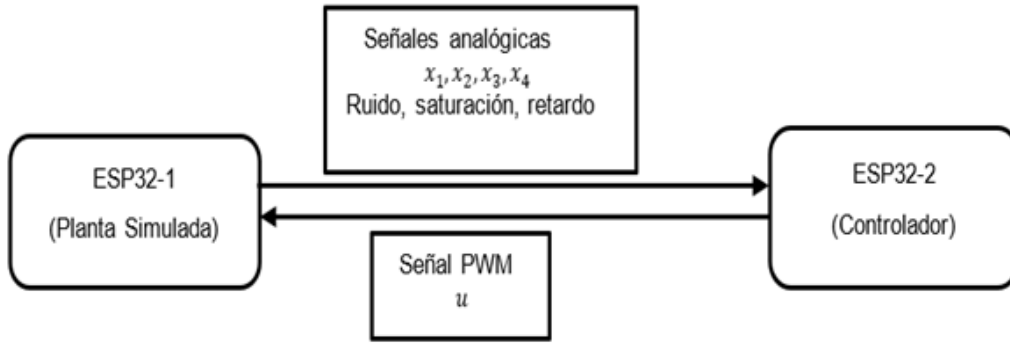
Al sustituir la ley de control (Ecuación 24) en el modelo reducido presentado en la Ecuación 23, se obtiene la dinámica en lazo cerrado de la posición (Ecuación 27), la cual corresponde a un sistema lineal de segundo orden regulado por un controlador PID convencional. El término proporcional corrige el error de posición, el derivativo introduce amortiguamiento adicional y el integrador elimina el error en estado estacionario, permitiendo que el carro siga la referencia r .

$$z_{k+1} = z_k + T_s e_{x,k} \quad (26)$$

$$\ddot{x} \simeq a_{41}(K_x^p e_x + K_x^i z + K_x^d \dot{x}) \quad (27)$$

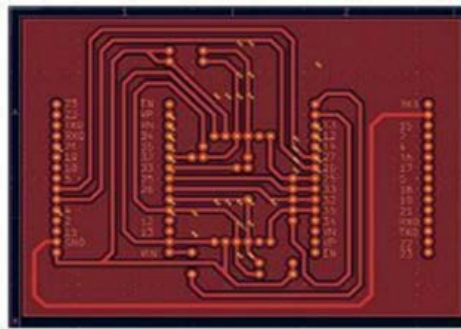
Implementación en ESP32

La validación experimental de los controladores se llevó a cabo utilizando dos microcontroladores ESP32 (Figura 1). El primero simula la planta del péndulo invertido y genera las variables de estado mediante salidas analógicas, el segundo ejecuta los algoritmos de control y aplica la acción de control como señal analógica de retorno. El intercambio reproduce condiciones reales de laboratorio, incluyendo ruido, cuantización, saturación y retardos, lo que refuerza el carácter didáctico de la plataforma. En la Figura 2 se presenta el diseño de la PCB que integra módulos ESP32 y la circuitería para el intercambio de señales analógicas. El montaje incluye los microcontroladores ESP32 y módulos DAC/ADC, utilizados para simular la planta del péndulo invertido y ejecutar algoritmos de control en tiempo real.



Fuente: elaboración propia.

Figura 1 Esquema de implementación con dos microcontroladores ESP32.



a) PCB diseñada.



b) Ensamble del sistema con módulos ESP32.

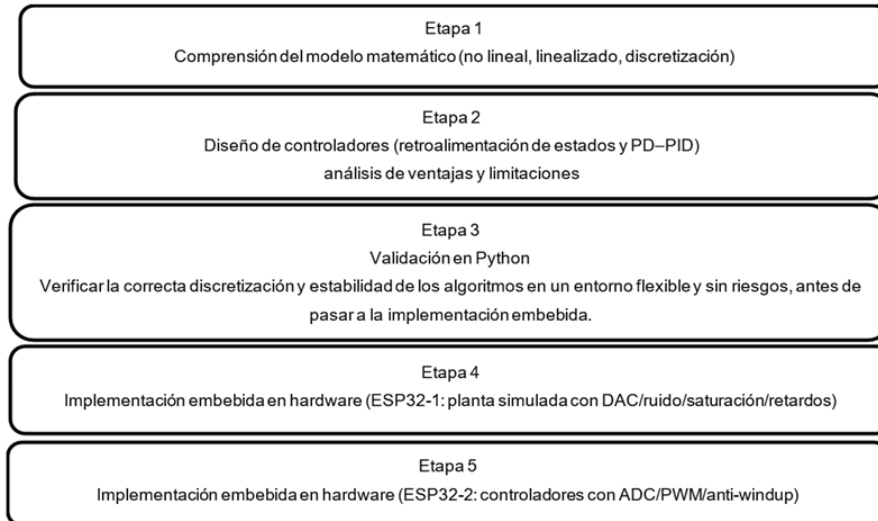
Fuente: elaboración propia.

Figura 2 Diseño y prototipo de la tarjeta de circuito impreso (PCB).

El primer ESP32 implementa el modelo discretizado del sistema dinámico, generando señales físicas en tiempo real a través de DAC para simular el comportamiento de la planta bajo diversas condiciones operativas. El segundo ESP32 se encarga de ejecutar algoritmos de control, digitalizando las señales analógicas del ángulo θ y la posición del carro mediante ADC, y calculando la acción de control con esquemas como retroalimentación de estados o PD–PID en cascada. La señal de salida se aplica a la planta simulada usando un módulo PWM. La comunicación entre dispositivos se realiza mediante señales analógicas, permitiendo un escenario realista con ruido, limitaciones de resolución y retardo. Se utilizan filtros digitales de primer orden para mitigar perturbaciones de alta frecuencia. Los experimentos se ejecutaron con un período de muestreo de T_s igual a 1 ms , un compromiso óptimo entre precisión en la discretización y capacidad de cómputo del ESP32.

Implementación didáctica

La Figura 3 presenta la estrategia didáctica propuesta para la enseñanza de control digital mediante la implementación de un péndulo invertido en ESP32.



Fuente: elaboración propia.

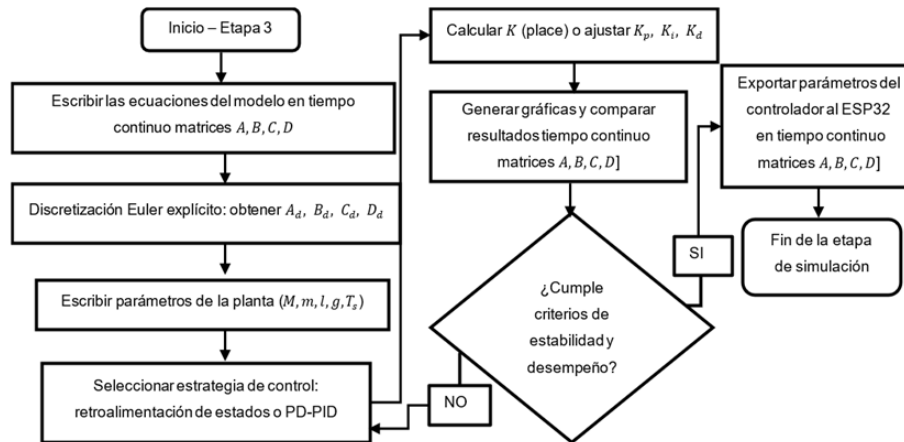
Figura 3 Proceso didáctico de enseñanza de control digital en ESP32.

El esquema organiza el trabajo en cinco etapas que articulan el tránsito desde la teoría matemática hasta la práctica experimental en laboratorio:

- **Etapa 1. Comprensión del modelo matemático:** se parte del modelo no lineal del péndulo invertido, su linealización alrededor del equilibrio inestable y la discretización. Este paso permite a los estudiantes identificar las diferencias entre un modelo exacto y sus aproximaciones, comprendiendo las implicaciones que estas tienen en el diseño de controladores.
- **Etapa 2. Diseño de controladores:** con base en el modelo linealizado, se implementan dos estrategias de control representativas: retroalimentación de estados y un esquema en cascada PD-PID. Esta etapa fomenta el análisis comparativo entre métodos clásicos, resaltando ventajas y limitaciones.
- **Etapa 3. Validación en Python:** los controladores se discretizan y validan utilizando la librería Control en Python. Se proporciona un código base para definir el sistema y añadir algoritmos, generando gráficas que permiten analizar el comportamiento dinámico. Esta etapa permite verificar la

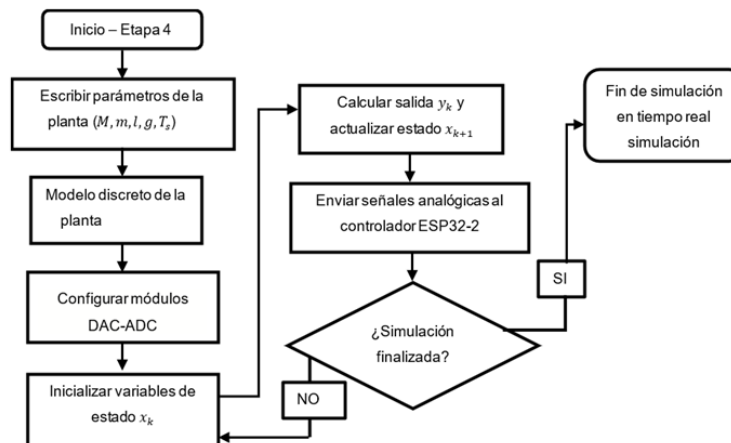
estabilidad y el diseño en un entorno seguro, así como contrastar la teoría con la simulación, mejorando la comprensión antes de la implementación embebida. El proceso se resume en la Figura 4, que ilustra la secuencia de validación y análisis en Python.

- **Etapa 4. Implementación embebida en hardware (ESP32-1):** el microcontrolador simula una planta en tiempo real, generando señales de estado y considerando efectos como ruido y retardos. Los estudiantes deben añadir ecuaciones discretas a un código base, lo que permite comparar el comportamiento de la planta embebida con simulaciones en Python, reforzando la comprensión teórica y práctica, (Figura 5).



Fuente: elaboración propia.

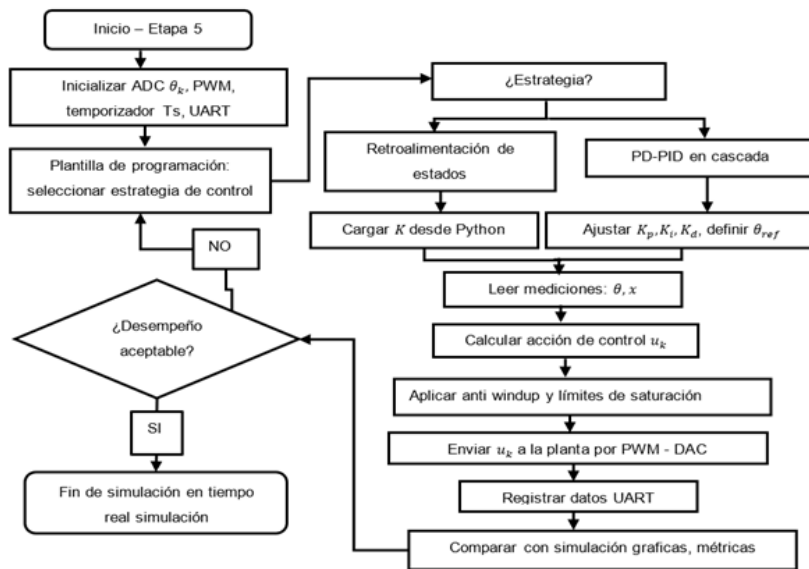
Figura 4 Diagrama de flujo de la etapa de validación en simulación (Python).



Fuente: elaboración propia.

Figura 5 Diagrama de flujo de la etapa 4 implementación en la ESP32.

- **Etapla 5. Implementación embebida en hardware (ESP32-2):** el segundo microcontrolador digitaliza señales analógicas mediante ADC y ejecuta algoritmos de control. Se presenta una plantilla para que los estudiantes calculen la matriz K o ajusten ganancias PD/PID en cascada. La acción de control se aplica por PWM, con anti-windup para evitar saturación, permitiendo observar las limitaciones físicas en el desempeño y comparar resultados con simulaciones, integrando teoría, validación en Python e implementación embebida en una plataforma reproducible, Figura 6.



Fuente: elaboración propia.

Figura 6 Diagrama de flujo de la etapa 5 implementación en la ESP32.

3. Resultados

Para las simulaciones y la implementación experimental se consideraron los siguientes parámetros físicos representativos del péndulo invertido. La masa del carro M se fijó en 1 kg , mientras que la masa del péndulo m se estableció en 0.5 kg . La longitud de la barra l , medida desde el pivote hasta el centro de masa, fue de 1 m , y la aceleración de la gravedad g se tomó como 9.81 m/s^2 . La implementación digital se realizó con un periodo de muestreo T_s de 1 ms .

En el caso del controlador basado en retroalimentación de estados, las ganancias se obtuvieron mediante ubicación de polos, resultando en un vector de ganancias

K cuyos coeficientes corresponden a cada uno de los estados del péndulo invertido. Por su parte, para el esquema de control PD–PID en cascada, se seleccionaron valores de las ganancias con base en el modelo linealizado y criterios de estabilidad y desempeño. En el lazo interno PD, la ganancia proporcional K_{θ}^p se determinó a partir de la relación $(K_p + a21)/b2$, considerando un valor de ganancia K_p de 20, mientras que la ganancia derivativa K_{θ}^d se fijó en 5. En el lazo externo PID, encargado de la regulación de la posición del carro, se emplearon para la ganancia proporcional K_x^p de 0.1, una ganancia integral, K_x^i de -0.03 y una ganancia K_x^d de 0.01. Las ganancias fueron ajustadas en el entorno ESP32 para lograr un equilibrio entre estabilidad, rechazo a perturbaciones y esfuerzo de control adecuado.

Resultados de simulación y experimentales

Las simulaciones se realizaron en Python utilizando la librería control, siguiendo la Etapa 3, para verificar la estabilidad y el desempeño de los controladores. Posteriormente, se implementaron en la plataforma ESP32 conforme a las Etapas 4 y 5, reproduciendo condiciones de laboratorio como ruido, saturación, cuantización y retardos. Este enfoque combinado permitió asegurar la coherencia entre teoría y práctica, facilitando un entorno didáctico donde los estudiantes pueden contrastar resultados, analizar fenómenos reales y comprender las diferencias entre la simulación y la implementación embebida.

Implementación del controlador basado en retroalimentación de estados

Los polos se ubican dentro del círculo unitario, garantizando la estabilidad asintótica del péndulo invertido. El ángulo θ converge rápidamente hacia el equilibrio vertical, con bajo sobre impulso y corto tiempo de establecimiento. La acción de control u_k presenta un esfuerzo inicial cercano a 150 unidades y luego disminuye progresivamente, como se muestra en la Figura 7. En la implementación en el ESP32, el controlador mantuvo el péndulo en posición vertical con bajo uso de recursos computacionales. Como se observa en la Figura 8, el ángulo permaneció alrededor del equilibrio, aunque con oscilaciones residuales y una acumulación de error en la posición del carro. La acción de control u_k , mostrada en la Figura 8,

presentó un esfuerzo inicial elevado para compensar las condiciones iniciales, seguido de oscilaciones amortiguadas que convergieron a cero en aproximadamente 3 s. Estos resultados coinciden con la simulación y evidencian estabilidad con eficiencia computacional, aunque con limitaciones ante errores estacionarios.

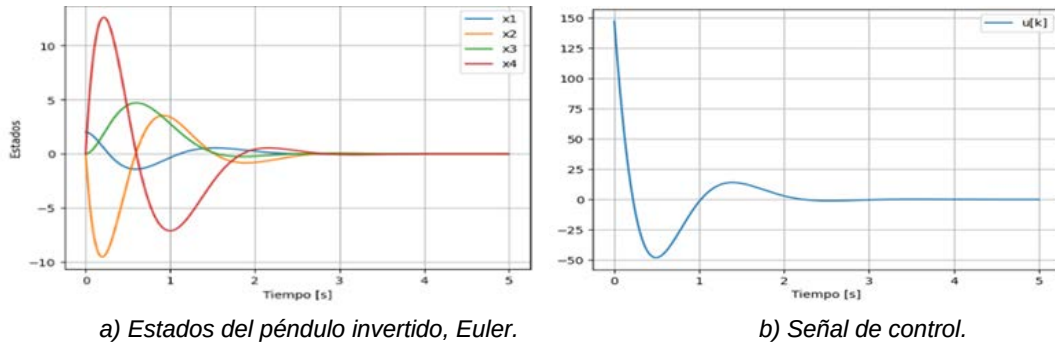


Figura 7 Resultados de simulación del controlador por retroalimentación de estados.

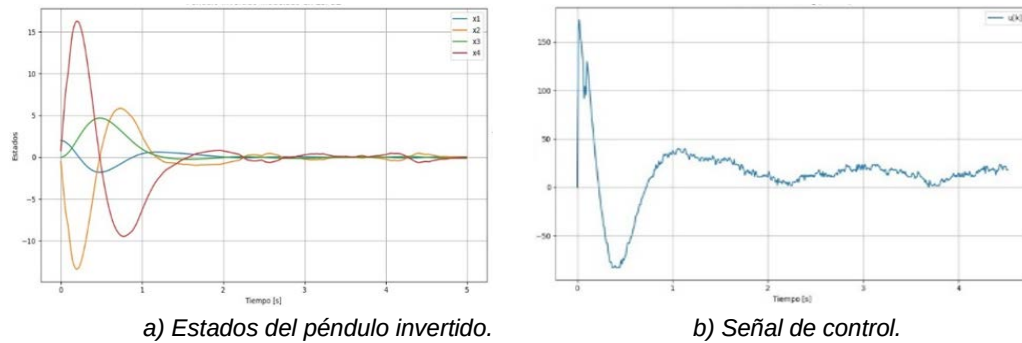


Figura 8 Resultados en ESP32 del controlador por retroalimentación de estados.

Simulación de controlador PD-PID en cascada

La estabilización del ángulo θ fue rápida y robusta gracias al lazo interno PD, mientras que el lazo externo PID reguló la posición del carro y redujo el error estacionario. Como se aprecia en la Figura 9a, los estados convergen en aproximadamente 15 s con oscilaciones amortiguadas, la acción de control u_k muestra un esfuerzo inicial alto seguido de variaciones moderadas (Figura 9b). En la implementación en el ESP32, el lazo PD estabilizó el ángulo de forma robusta y el PID eliminó el error estacionario, mejorando la precisión. La Figura 10a muestra

como los estados convergieron en aproximadamente 10 s con oscilaciones amortiguadas. La Figura 10b presenta una señal de control estable y dentro de los límites del actuador, validando el esquema PD–PID en cascada.

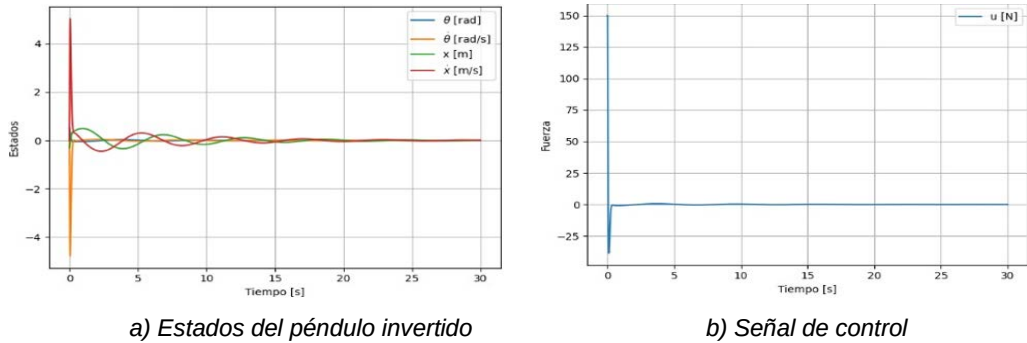


Figura 9 Resultados de simulación del controlador PD–PID en cascada.

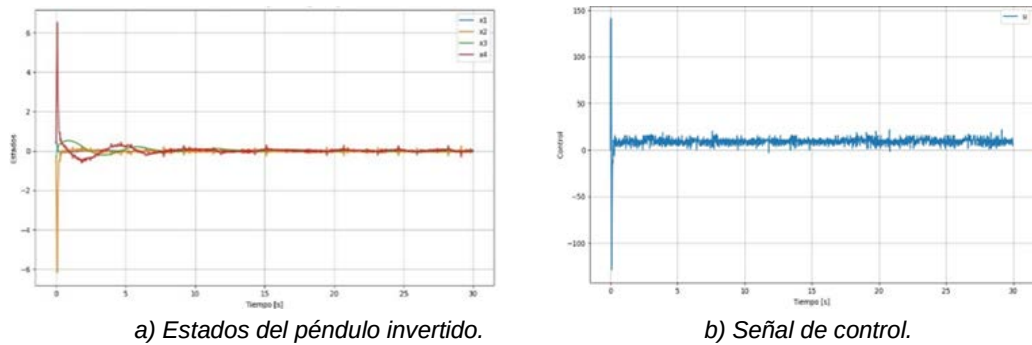


Figura 10 Resultados en ESP32 del controlador PD–PID en cascada.

4. Discusión

Los resultados demuestran que tanto la retroalimentación de estados como el control en cascada PD–PID son estrategias efectivas para estabilizar un péndulo invertido en tiempo discreto. La retroalimentación de estados destaca por su sencillez de implementación y su baja demanda computacional, lo que la convierte en una opción adecuada para introducir conceptos fundamentales de control digital. No obstante, presenta una limitación importante: no logra rechazar perturbaciones constantes ni eliminar el error estacionario en la posición del carro. En contraste, el esquema PD–PID mejora significativamente el desempeño global del sistema, ya que reduce el error permanente y ofrece una respuesta más robusta frente a

perturbaciones externas, aunque a costa de un mayor esfuerzo de control. Desde la perspectiva educativa, la plataforma basada en ESP32 representa una alternativa accesible y versátil para replicar condiciones reales de laboratorio, favoreciendo un aprendizaje activo centrado en el diseño y análisis de controladores discretos. Como línea futura, se propone extender el estudio hacia modelos no lineales y estrategias de control avanzadas, como control adaptativo o aprendizaje reforzado.

5. Conclusiones

Se demostró la viabilidad del ESP32 como una plataforma educativa y experimental para la implementación de controladores digitales en sistemas dinámicos. Tanto la retroalimentación de estados como el control PD–PID en cascada lograron estabilizar el péndulo invertido en condiciones simuladas y experimentales, confirmando la efectividad del enfoque propuesto. La retroalimentación de estados destacó por su simplicidad y baja demanda computacional, adecuada para introducir conceptos clave como controlabilidad y ubicación de polos, aunque mostró limitaciones ante perturbaciones constantes, evidenciadas en un error estacionario en la posición. En contraste, el control PD–PID en cascada ofreció mejor rechazo a perturbaciones y menor error estacionario, a costa de un mayor esfuerzo de control y uso de recursos. En conjunto, la plataforma basada en ESP32 representa una herramienta didáctica de bajo costo y alto valor formativo, al permitir a los estudiantes experimentar con fenómenos reales como saturación, ruido y retardos, fortaleciendo el aprendizaje activo y la comprensión práctica del control digital.

6. Referencias y Bibliografía

- [1] Bermúdez Gil C. A., Ospino Balcázar D. A., Desarrollo de una plataforma embebida como estrategia de fortalecimiento a las competencias profesionales en estudiantes de ingeniería electrónica. *Pistas Educativas*, vol. 45, no. 145, 2023.
- [2] Costanzo M, Mazza R, Natale C, Digital Control of an Inverted Pendulum Using a Velocity-Controlled Robot. *Machines*, vol. 13, no. 6, p. 528, 2025.

- [3] De la Peña D. M., Domínguez M., Gomez-Estern F., Reinoso O., Torres F., Dormido S., Overview and future trends of control education. *IFAC-PapersOnLine*, vol. 55, no. 17, pp. 79–84, 2022.
- [4] Franklin, G. F., Powell, J. D., & Emami-Naeini, A., (2015). *Feedback control of dynamic systems* (7th ed.). Pearson.
- [5] González J., Ramírez L., Torres P., Implementación de controladores digitales en microcontroladores de bajo costo para aplicaciones educativas. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, vol. 19, pp. 45–56, 2022.
- [6] Hernandez R., Garcia-Hernandez R., Jurado F., Modeling, simulation, and control of a rotary inverted pendulum: A reinforcement learning-based control approach. *Modelling*, vol. 5, no. 4, pp. 1824–1852, 2024.
- [7] Jiménez A. B. F., Di Gennaro S., Lúa C. A., Nonlinear control applied to an autonomous vehicle (Control no lineal aplicado a un vehículo autónomo). *Pistas Educativas*, vol. 46, no. 149, 2025.
- [8] Márquez-Vera M. A., Martínez-Quezada M., Calderón-Suárez R., Rodríguez A., Ortega-Mendoza R. M., Microcontrollers programming for control and automation in undergraduate biotechnology engineering education. *Digital Chemical Engineering*, vol. 9, pp. 100122, 2023.
- [9] Nagarajan A., Victoire A. A., Optimization reinforced PID-sliding mode controller for rotary inverted pendulum. *IEEE Access*, vol. 11, pp. 24420–24430, 2023.
- [10] Nguyen T. V. A., Dao Q. T., Bui N. T., Optimized fuzzy logic and sliding mode control for stability and disturbance rejection in rotary inverted pendulum. *Scientific Reports*, vol. 14, no. 1, pp. 31116, 2024.
- [11] Rivas D. H. G., Domínguez J. R., Cisneros S. O., Zapata H. E. M., Baungarten-Leon E. I., On the novel design and FPGA implementation of a fuzzy PD control for a DC motor. *Proceedings of the 2024 21st International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE)*, IEEE, pp. 1–6, October 2024.

- [12] Vásquez M. C., Digital Control Education, Engaging and Skill-Oriented. IFAC-PapersOnLine, vol. 58, no. 26, pp. 88–93, 2024.
- [13] Villaseñor M., et al., Uso del microcontrolador ESP32 en la enseñanza de sistemas embebidos y control digital. IEEE Latin America Transactions, vol. 20, no. 12, pp. 1895–1903, 2022.
- [14] Zavala J. S., Ramírez N. E. C., Diseño, desarrollo y aplicación de una tarjeta electrónica didáctica para la enseñanza-aprendizaje de sistemas embebidos (Design, development and application of an electronic didactic card for teaching learning of embedded systems). *Pistas Educativas*, vol. 45, no. 145, 2023.