

# **APLICACIÓN DE FUNCIONES COSENO FRECUENCIALES EN FILTROS DIGITALES PARA COMUNICACIONES MÓVILES MODERNAS**

*APPLICATION OF COSINE FREQUENCY FUNCTIONS IN DIGITAL  
FILTERS FOR MODERN MOBILE COMMUNICATIONS*

**David Ernesto Troncoso Romero**

Universidad Autónoma del Estado de Quintana Roo, México  
*david.troncoso@uqroo.edu.mx*

**Julio César Ramírez Pacheco**

Universidad Autónoma del Estado de Quintana Roo, México  
*juliocr@uqroo.edu.mx*

**Daniel Sergio Martínez Ramírez**

Universidad Autónoma del Estado de Quintana Roo, México  
*daniel.martinez@uqroo.edu.mx*

**José Antonio León Borges**

Universidad Autónoma del Estado de Quintana Roo, México  
*jleon@uqroo.edu.mx*

**Homero Toral Cruz**

Universidad Autónoma del Estado de Quintana Roo, México  
*htoral@uqroo.edu.mx*

**Recepción:** 23/noviembre/2024

**Aceptación:** 23/enero/2025

## **Resumen**

En los sistemas de comunicaciones móviles de nueva generación, los componentes de procesamiento digital de señales deben satisfacer alta velocidad de operación, bajo consumo de potencia, baja utilización de elementos de hardware, así como respuestas en frecuencia reconfigurables para apearse a múltiples estándares. Esto representa un gran reto de diseño porque las características se comprometen entre sí, provocando que la optimalidad de los sistemas se sitúe en frentes de Pareto demasiado complejos. En este artículo se revisan las funciones coseno frecuenciales para aprovechar la efectividad del diseño por bloques, y se documenta su utilidad para escenarios de aplicación en las unidades de filtrado digital contra aliasing, necesarias para la conversión de analógico a digital efectuada

a muy altas frecuencias. Los resultados muestran que las funciones coseno frecuenciales pueden lograr mejoras en la atenuación del aliasing de hasta  $-26$  dB, y a la vez una reducción de la distorsión espectral por amplitud decreciente de hasta cinco veces en cascadas de módulos promediadores, lo cual pone a dichas funciones como candidatas para la mejora de estos filtros debido a su baja complejidad.

**Palabras Clave:** Comunicaciones, filtros digitales, funciones coseno frecuenciales.

## **Abstract**

*In next-generation mobile communication systems, digital signal processing components must meet high operating speed, low power consumption, low hardware utilization, as well as frequency responses that can be reconfigured to adhere to multiple standards. These demands pose a significant design challenge because the characteristics are mutually conflicting, resulting in systems that are optimal under highly complex Pareto fronts. This article reviews cosine frequency functions to take advantage of the effectiveness of block designs; and documents their utility for application scenarios in anti-aliasing digital filtering units, necessary for very high-frequency analog-to-digital conversion. The results show that cosine frequency functions can achieve up to  $-26$  dB improvement in aliasing attenuation, while reducing the amplitude-decaying spectral distortion up to five times in cascaded averaging modules, making these functions candidate for improving the filters due to their low complexity.*

**Keywords:** *Communications, digital filters, cosine frequency functions.*

## **1. Introducción**

Los sistemas de comunicaciones móviles han ido evolucionando a través de los años por generaciones. Actualmente está ocurriendo el cambio desde la cuarta hacia la quinta generación (es decir, de 4G a 5G), ambas basadas en la modulación de Multiplexaje por División de Frecuencias Ortogonales (OFDM). En comparación con 4G, para 5G se establecieron como objetivos tasas de transmisión hasta 20 veces más grandes, tiempos de latencia hasta 10 veces más cortos, y densidad de

conectividad hasta 10 veces mayor [Buzzi et al., 2016; International Communications Union, 2017].

La sexta generación hará frente a la necesidad de transmitir y recibir una enorme y creciente cantidad de datos, por ejemplo, para videos inmersivos 3D de realidad aumentada y virtual en tiempo real, lo cual será aplicable en telemedicina, aprendizaje basado en recursos electrónicos a distancia (e-learning), teleconferencias, o entretenimiento. Además, considerará aplicaciones donde es primordial tener una baja latencia, como en la operación remota de maquinaria en procesos industriales o de robots para cirugías. También tomará en cuenta la gran cantidad de diversos aparatos y dispositivos automáticos que se añadirán a la red para comunicarse entre sí, inclusive con altas movilidades, lo cual habilitará nuevos desarrollos industriales y de ciudades inteligentes donde se tengan automatizados los hogares, transportes, escuelas, campos de cultivo agrícola, etcétera, e incluirá no solamente las radiofrecuencias sino los espectros visibles como canales físicos [Viswanathan & Mogensen, 2021]. El esquema de modulación Ortogonal Tiempo Frecuencia Espacio (Orthogonal Time Frequency Space Modulation, OTFS) se perfila como una técnica prometedora para esta tecnología [Mucchi et al., 2023].

Es de esperar que para cada servicio y escenario de despliegue se prefieran diferentes formatos de señalización. Por ejemplo, subportadoras angostas con pequeña separación entre ellas pueden dar soporte a conexiones masivas, y rangos mayores de frecuencia entre subportadoras más anchas pueden permitir latencias reducidas. De este modo, es necesaria una combinación de estándares de baja potencia para aplicaciones de baja tasa de datos, y de estándares de gran ancho de banda sobre portadoras de longitud de onda milimétrica para aplicaciones de datos de alta tasa. La previamente mencionada combinación de múltiples estándares requiere de programabilidad para habilitar una interfaz flexible que permita sostener todos estos servicios y los escenarios de despliegue asociados de manera eficiente [Alsabah et al., 2021; Zeineddine, et al. 2021].

En las terminales móviles, lo anterior se debe lograr con bajo consumo de potencia y baja utilización de elementos de hardware. Esto introduce aún más objetivos de optimización. La cadena de procesamiento es bastante compleja debido a la

multifuncionalidad esperada, así que un diseño optimizado de manera general es prácticamente imposible porque el frente de Pareto tiene una muy alta dimensionalidad. Por lo tanto, es preferible seguir el enfoque de diseño por bloques. En este sentido, uno de los bloques más importantes en los modernos receptores de radio es el convertidor de analógico a digital. Debido a que se espera tener interfaces digitales programables, con capacidad de ajuste de una gran cantidad de parámetros, dicha conversión debe ocurrir directamente en las altas frecuencias. El esquema prometedor para llevar a cabo esta conversión utiliza un bloque modulador delta-sigma simple para pasar del frente analógico al dominio digital, y se beneficia del procesamiento en el dominio digital utilizando un filtro antialiasing que absorbe la complejidad del sistema [De La Rosa, 2023; Zhibin, Ruotong & Min, 2020].

En este artículo se revisan las cascadas de módulos promediadores empleados como algoritmo de filtrado antialiasing en estos convertidores programables de analógico a digital. El objetivo es explorar las funciones coseno frecuenciales para documentar su utilidad en la mejora de la respuesta en frecuencia de dichos filtros. Este enfoque ha sido inspirado por la perspectiva de afinamiento con filtrado de quinto orden que ha sido recientemente propuesta en [Zhibin, Ruotong & Min, 2020]. Nuestro planteamiento difiere por ser un enfoque más generalizado que no considera necesario optimizar un sistema compuesto, sino simplemente ajustar funciones coseno frecuenciales separadas. De esa manera, se facilita el diseño práctico de un sistema más simplificado y flexible. Los resultados muestran que las funciones coseno frecuenciales pueden lograr mejoras en la atenuación del aliasing de hasta  $-26$  dB, y a la vez una reducción de más de cinco veces la distorsión espectral por amplitud decreciente, lo cual pone a dichas funciones como candidatas para la mejora de estos filtros debido a su baja complejidad.

## **2. Métodos**

Esta investigación ha sido enfocada en el filtro digital antialiasing basado en cascada de promediadores. Debido a que ese filtro es de tipo lineal e invariante en el tiempo, el método que se ha utilizado para caracterizarlo es determinístico, específicamente centrado en el análisis de su función de transferencia y de su

respuesta en frecuencia. Este análisis se ha llevado a cabo utilizando el lenguaje Python 3, con los paquetes numpy, scipy y matplotlib, especializados para examinar y diseñar filtros digitales. El intérprete usado es Google Colab, entonces se requiere una conexión estable a internet, es decir, sin interrupciones y con al menos 20 Megabits por segundo, así como una cuenta personal de Google. Debido a que estas ejecuciones son en la nube, el computador puede ser personal y con características modestas. Para esta investigación se usó una computadora *Lenovo IdeaPad Slim 3i* con 8 gb de RAM, Procesador 13th Gen Intel Core i3, y almacenamiento secundario de 250 gb.

En este punto, conviene establecer algunos conceptos. Primero repasaremos las definiciones de señal digital y de aliasing. Posteriormente, se explicará cómo deben ser las características en frecuencia de la ganancia del filtro que conforma la primera etapa del filtrado digital antialiasing en dos etapas. Después de estas revisiones será más fácil describir los análisis necesarios para conducir esta investigación.

Definimos una señal digital como una secuencia de números que se pueden escribir, cada uno, con una cantidad finita de bits. Cada número es una muestra tomada de una señal analógica. Si las muestras son adquiridas suficientemente rápido en comparación con la máxima frecuencia contenida en la señal, a una tasa que es por lo menos el doble de esa máxima frecuencia, entonces la secuencia de números provee una representación adecuada de esa señal. Sin embargo, si las muestras son adquiridas más lentamente que el doble de la máxima frecuencia de la señal, la secuencia de números representa a otra señal, una impostora y no la original. Esa señal impostora se considera un “alias” de la original, y de ahí surge el término aliasing. Este fenómeno se ilustra en la Figura 1, la Figura 1a muestra una señal analógica apropiadamente muestreada con una tasa de 40 *muestras/s*. En la Figura 1b vemos otra señal analógica con su alias digital. Nótese que en este caso las muestras no representan a la señal analógica original sino a otra diferente.

Para eliminar el fenómeno de aliasing, en todo proceso de muestreo debe existir un filtro que atenúe las altas frecuencias. Ese es el filtro antialiasing. En los convertidores analógico-digital modernos mencionados previamente, el modulador delta-sigma, como es simplificado, genera una señal digital de muy baja resolución,

sobremuestreada a una tasa de  $f_s$  Hz. El filtro antialiasing, el cual opera en el dominio digital, es requerido para eliminar las altas frecuencias de esa señal y así poder reducir la tasa de muestreo usualmente por un factor  $2R$ , donde  $R$  es entero. Además, sirve para incrementar la resolución de las muestras.

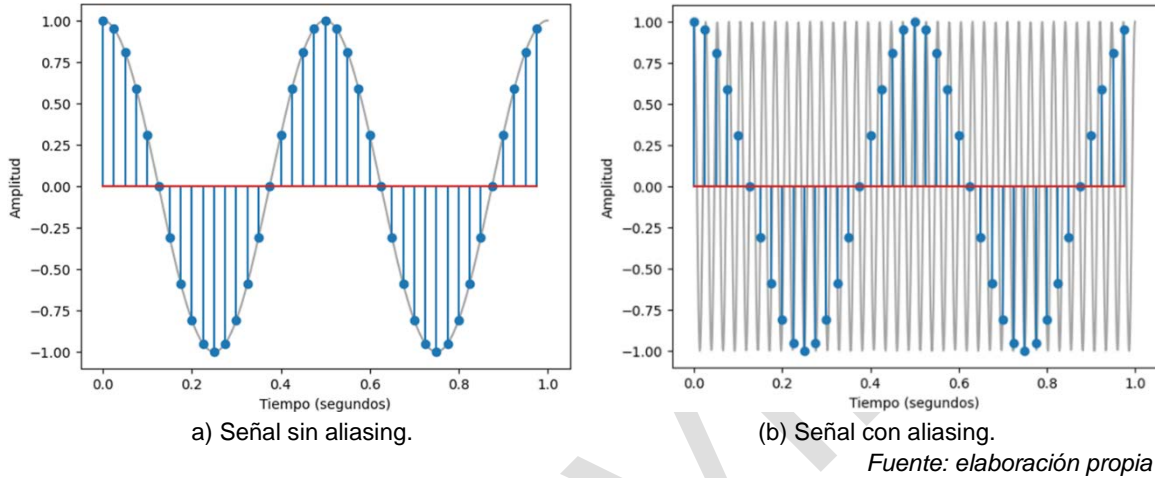


Figura 1 Señales analógicas muestreadas a 40 muestras por segundo.

El filtrado digital antialiasing usualmente se lleva a cabo en dos etapas, y la primera etapa es la más desafiante para diseñar debido a que opera con la tasa de muestreo  $f_s$ , que es la más alta. La magnitud de su respuesta en frecuencia debe ser pasabajas con múltiples bandas de rechazo, cada una de éstas con al menos  $-60$  dB de atenuación, apeándose a las características ilustradas en la Figura 2. La banda de paso tiene un ancho de  $f_s/(4R)$  Hz, y las bandas de rechazo, cada una con un ancho de  $f_s/(2R)$  Hz, están centradas en múltiplos de  $f_s/R$  Hz.

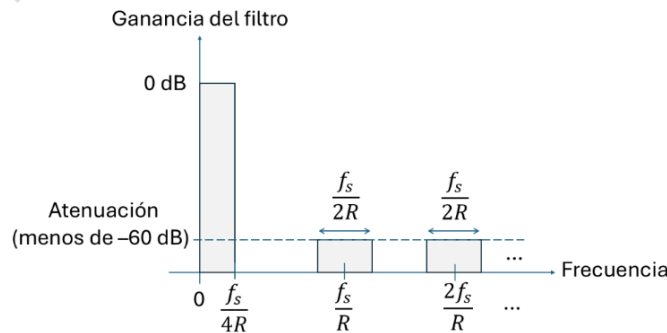


Figura 2 Frecuencia del filtro antialiasing en la primera etapa de filtrado.

El filtro antialiasing basado en cascada de promediadores es ampliamente utilizado en sistemas modernos de comunicaciones [Datta and Dutta, 2024] debido a su simplicidad y a sus características frecuenciales, que satisfacen de manera aproximada las especificaciones ilustradas en la Figura 2. Su función de transferencia en la variable compleja  $z$  está dada por la Ecuación 1.

$$H(z) = \left( \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{R-1} z^{-n} \right)^N \quad (1)$$

Donde  $N$  es el número de unidades promediadoras en cascada. La operación de promedio es evidente: una sumatoria de  $R$  variables  $z$  dividida entre  $R$ . Su respuesta en frecuencia puede obtenerse aprovechando la equivalencia, Ecuación 2.

$$\sum_{n=0}^{R-1} z^{-n} = \left( \frac{1 - z^{-R}}{1 - z^{-1}} \right)^N. \quad (2)$$

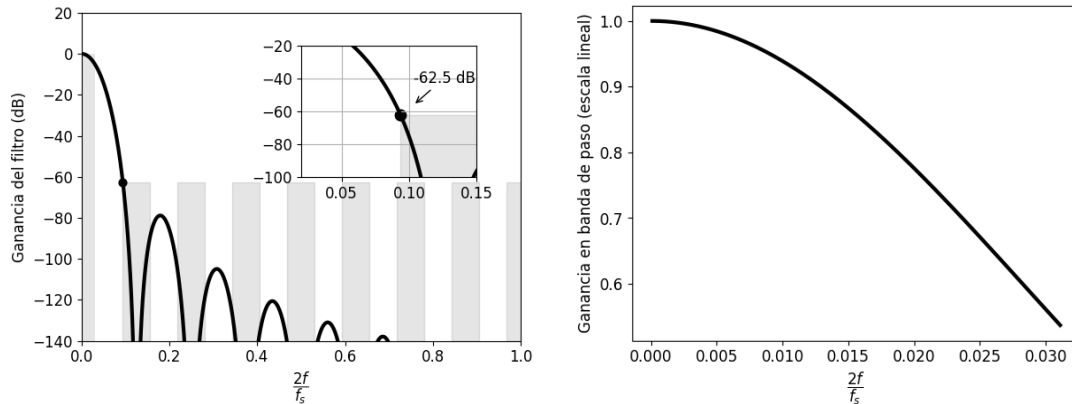
Factorizando los términos  $z^{-(R/2)}$  y  $z^{-(1/2)}$  en el cociente equivalente, luego sustituyendo el fasor  $z = e^{j2\pi f/f_s}$  en la expresión resultante y finalmente empleando identidades de Euler, se obtiene la respuesta en frecuencia del filtro, Ecuación 3. Este filtro tiene una función de fase lineal con respecto a la frecuencia, y por lo tanto no provoca distorsión de fase.

$$H(e^{j2\pi f/f_s}) = \left[ \frac{1}{R} \frac{\sin\left(\frac{\pi f R}{f_s}\right)}{\sin\left(\frac{\pi f}{f_s}\right)} \right]^N e^{-j\pi f N(R-1)/f_s}. \quad (3)$$

Además, debido a la forma de su ganancia en función de la frecuencia, el filtro tiene ceros en valores de  $f$  que son múltiplos de  $f_s/R$ , y el peor caso de atenuación ocurre en el borde de baja frecuencia de la primera banda de rechazo, es decir, en la frecuencia  $f = [(1/R) - (1/4R)]f_s$ .

La Figura 3a ilustra la magnitud de la respuesta en frecuencia de este filtro para un caso de ejemplo con un típico factor  $R = 16$  y con  $N = 6$  unidades en cascada. Nótese que el peor caso de atenuación para este caso es de  $-62.5 \text{ dB}$ . La Figura 3b presenta un detalle, en escala lineal, de la ganancia del filtro en la banda de paso. Nótese en Figura 3 que existe una distorsión espectral por amplitud

decreciente, que llega a reducir la amplitud de las señales prácticamente hasta la mitad de su valor en el borde superior de dicha banda.



a) Amplitud (escala logarítmica) en todo el rango de frecuencias con detalle del peor caso de atenuación.

b) Amplitud (escala lineal) en la banda de paso.

Fuente: elaboración propia

Figura 3 Ganancia del filtro antialiasing basado en la cascada de  $N = 6$  promediadores.

En [Zhibin, Ruotong & Min, 2020] se propuso un filtro de quinto orden con respuesta al impulso finita (Finite Impulse Response, FIR) para “afilar” la respuesta en frecuencia del sistema de promediadores cuando se pone en cascada con él. En su función  $F(z)$ , los valores de los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  se deben optimizar para obtener una respuesta en frecuencia total con mejores características, donde  $F(z)$  esta dada por Ecuación 4.

$$F(z) = [1 + (\alpha + \beta)z^{-1} + (2 + \alpha\beta)z^{-2} + (\alpha + \beta)z^{-3} + z^{-4}](1 + z^{-1}). \quad (4)$$

Los inconvenientes son que los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  son números reales, entonces sus operaciones en hardware son computacionalmente demandantes. Además, este filtro es únicamente aplicable para valores  $R$  que son pares, entonces no es general. Ahora, en lugar de ese enfoque, consideremos una simple función de transferencia dada por Ecuación 5.

$$D(z) = d_1 + d_2z^{-L} + d_1z^{-2L}, \quad (5)$$

Donde  $d_1$ ,  $d_2$  y  $L$  son números reales, pero  $L$  debe ser entero. Cuando se factoriza  $z^{-L}$  en la Ecuación 5, luego usando  $z = e^{j2\pi f/f_s}$  y finalmente aplicando identidades de Euler, expresamos la respuesta en frecuencia de este filtro, Ecuación 6.



$$D(e^{j2\pi f/f_s}) = [d_2 + 2d_1 \cos(2\pi fL/f_s)]e^{-j2\pi fL/f_s}. \quad (6)$$

De la Ecuación 6 vemos que la amplitud de la respuesta en frecuencia es una función coseno frecuencial, es decir, presenta una forma coseno escalada por  $2d_1$ , oscilando sobre un nivel de ganancia  $d_2$ , y con amplitud de  $(2d_1 + d_2)$  en  $f = 0$ .

Si se ajustan los parámetros  $L$ ,  $d_1$  y  $d_2$ , la forma coseno frecuencial de la Ecuación 6 puede aprovecharse para mejorar la respuesta del filtro al colocar en cascada la unidad de procesamiento  $D(z)$ . Esto resulta en un filtro compuesto, Ecuación 7.

$$H_c(z) = H(z)D(z). \quad (7)$$

Por ejemplo, el primer cruce por cero de la función coseno pueden ayudar a incrementar la atenuación del filtro en la primera banda de rechazo, donde ocurre el peor caso de atenuación. Por otra parte, la forma coseno, hecha negativa para que quede creciente, y ajustada sobre un nivel igual a 1, puede ayudar a corregir la distorsión espectral por amplitud decreciente en la banda de paso. En cualquiera de los casos, esto pone en general un problema de optimización en tres variables, a saber, minimizar la norma- $p$  (usualmente cuadrática, i.e.,  $p = 2$ ) del error  $\varepsilon$  entre la ganancia deseada y la ganancia real del filtro  $H_c(z)$  sobre la banda deseada para valores específicos  $R$  y  $N$ , ecuaciones 8 y 9.

$$\{d_1, d_2, L\} = \arg \min \|\varepsilon\|_p \quad \text{en } f = \text{banda deseada}, \quad (8)$$

$$\varepsilon = A\left(\frac{f}{f_s}\right) - \left[ \frac{1 \sin\left(\frac{\pi f R}{f_s}\right)}{R \sin\left(\frac{\pi f}{f_s}\right)} \right]^N \left[ d_2 + 2d_1 \cos\left(\frac{2\pi f L}{f_s}\right) \right]. \quad (9)$$

En la Ecuación 9,  $A(f/f_s)$  es el valor ideal de la ganancia del filtro (uno en la banda de paso, y cero en las bandas de rechazo). En lugar de resolver dicho problema de optimización, en esta investigación procederemos con un enfoque más intuitivo y práctico usando la Ecuación 6.

En el caso de la corrección de distorsión espectral, elegir  $L = R$  garantiza que en el borde de la banda de paso  $f = f_s/(4R)$  la función coseno frecuencial aún esté dentro de su primer cuarto de ciclo, entonces no tiene ningún tramo de onda repetido y puede servir completamente para hacer la corrección esperada. Además,  $d_1$  debe

ser negativo para darle forma creciente al primer cuarto de ciclo positivo del coseno; y si hacemos  $d_2 = -2d_1 + 1$  para garantizar que la función coseno frecuencial tenga una ganancia igual a 1 en la frecuencia  $f = 0$ , solamente se tiene como incógnita a  $d_1$ . Más aún, podemos restringir que  $d_1$  sea exclusivamente una potencia de dos, o la suma de dos potencias de dos, para eliminar su complejidad de hardware.

En el caso del incremento de la atenuación en la primera banda de rechazo, podemos elegir  $d_1 = 2^{-1}$  para simplificar, de modo que solamente con el valor  $d_2$  se pueda establecer un nivel de cruce por cero para la función coseno frecuencial. Dicha función comienza a repetirse en  $f = f_s/L$  (ese es su periodo), además es simétrica alrededor del valor  $f = f_s/2L$ , y su cruce por cero queda entre  $f = 0$  y  $f = f_s/2L$ , dependiendo de  $d_2$ . Si ponemos este cruce por cero en el lado izquierdo de la primera banda de rechazo, podemos decir que el primer cero del filtro promediador puede quedar justo en el punto de simetría de la función coseno frecuencial, es decir, podemos expresar  $f_s/2L = f_s/R$ , y por lo tanto obtenemos  $L = R/2$ . Con ese valor, y usando  $f = [(1/R) - (1/4R)]f_s$ , que es la frecuencia donde ocurre el peor caso de atenuación, es posible igualar la función coseno frecuencial a cero y obtener  $d_2 = -2\cos(3\pi/4) \approx 1 - 2^{-2}$ . Esta última expresión, aunque aproximada, es preferible porque solamente necesita una resta, ya que las potencias de dos se implementan sin costo de hardware. Debido a que  $L$  debe ser entero, usamos  $L = \lfloor R/2 \rfloor$ , donde  $\lfloor x \rfloor$  indica "la parte entera de  $x$ ".

Finalmente, vale la pena mencionar que usualmente se utilizan  $N = 6$  promediadores en cascada para alcanzar  $-60$  dB de atenuación. Sin embargo, con la función coseno frecuencial de corrección, es posible que se necesiten menos promediadores, por ejemplo  $N = 5$  o incluso  $N = 4$ . Además,  $R$  prácticamente no cambia la forma arqueada de ganancia que existe entre la banda de paso del filtro promediador y la primera banda de rechazo, por lo tanto, se puede utilizar un único valor  $R$  como base de diseño al calcular los valores de  $d_1$  o de  $d_2$ . Para el caso de  $L$ , su dependencia sobre  $R$  se debe respetar.

Con estas restricciones, y aplicando los análisis previamente mencionados, es fácil determinar los valores de  $d_1$ ,  $d_2$  y  $L$  para las funciones coseno frecuenciales, tanto

para un caso de corrección de distorsión espectral por amplitud decreciente como para un caso de mejora del peor caso de atenuación.

### 3. Resultados

La Tabla 1 presenta los valores de los parámetros  $d_1$ ,  $d_2$  y  $L$ , tanto para la función de corrección de distorsión por amplitud decreciente como para la función de mejora del peor caso de atenuación. Para calcular los valores de  $d_1$  y  $d_2$  en esta última función, se utilizó el valor  $R = 16$  como base de diseño. Nótese que para aumentar la atenuación en la primera banda de rechazo los valores de  $d_1$ ,  $d_2$  y  $L$  están completamente especificados. Sin embargo, para la corrección de distorsión espectral el valor de  $L$  está completamente especificado, pero el valor de  $d_2$  solamente está parcialmente especificado, ya que depende de  $d_1$ . A su vez, el valor para  $d_1$  depende de  $N$ . La Tabla 2 muestra los valores obtenidos para  $d_1$  en el caso de corrección de distorsión espectral por amplitud decreciente, usando nuevamente el valor base  $R = 16$ . Se han considerado tres valores para  $N$ .

Tabla 1 Valores de los parámetros de las funciones coseno frecuenciales con relación al caso de aplicación.

Caso de aplicación	$d_1$	$d_2$	$L$
Corrección de distorsión espectral en la banda de paso	(depende de $N$ )	$d_2 = 1 - 2d_1$	$L = R$
Aumento de la atenuación en la primera banda de rechazo	$d_1 = 2^{-1}$	$d_2 = 2^{-1} + 2^{-2}$	$L = \lfloor R/2 \rfloor$

Fuente: elaboración propia.

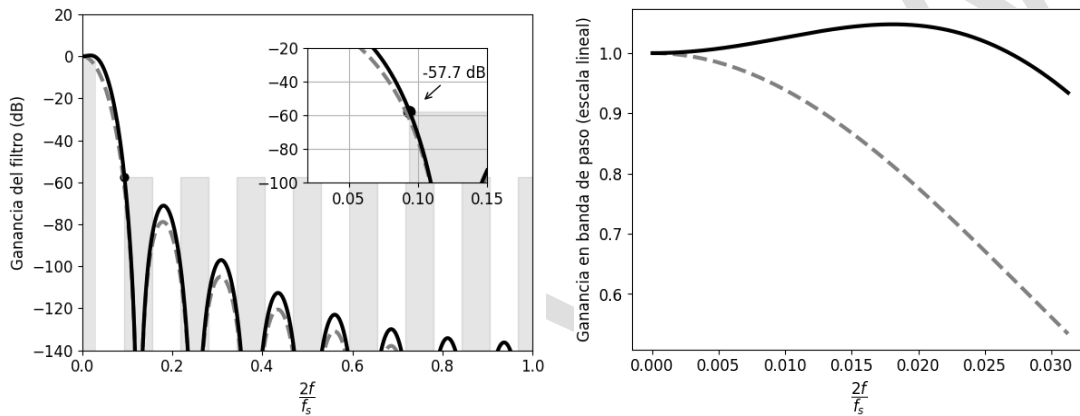
Tabla 2 Valor del parámetro  $d_1$  para corrección de distorsión espectral

$N$	Valores para $d_1$	Uso de una función coseno para mejorar atenuación
$N = 4$	$d_1 = -(2^{-1} - 2^{-3})$	Sí
$N = 5$	$d_1 = -(2^{-1} - 2^{-4})$	Sí
$N = 6$	$d_1 = -(2^{-1} - 2^{-3})$	No

Fuente: elaboración propia.

Con  $N = 6$ , se tiene el escenario donde los  $-60$  dB para las bandas de rechazo se deberían alcanzar únicamente con la cascada de promediadores. Con  $N = 5$  y con  $N = 4$  se tiene el escenario donde los  $-60$  dB para las bandas de rechazo deben alcanzarse con los promediadores y una función coseno frecuencial en cascada. La

Figura 4a muestra la ganancia en  $dB$  del filtro compuesto por una conexión en cascada de  $N = 6$  promediadores y una función coseno frecuencial para corrección de distorsión espectral. Similarmente, la Figura 5a presenta la ganancia en  $dB$  del filtro compuesto por una conexión en cascada de  $N = 5$  promediadores y dos funciones coseno frecuenciales, una de ellas para corrección de distorsión espectral y la otra para aumento de la peor atenuación. La Figura 6a es muy parecida a la Figura 5a, sólo que para  $N = 4$  promediadores.

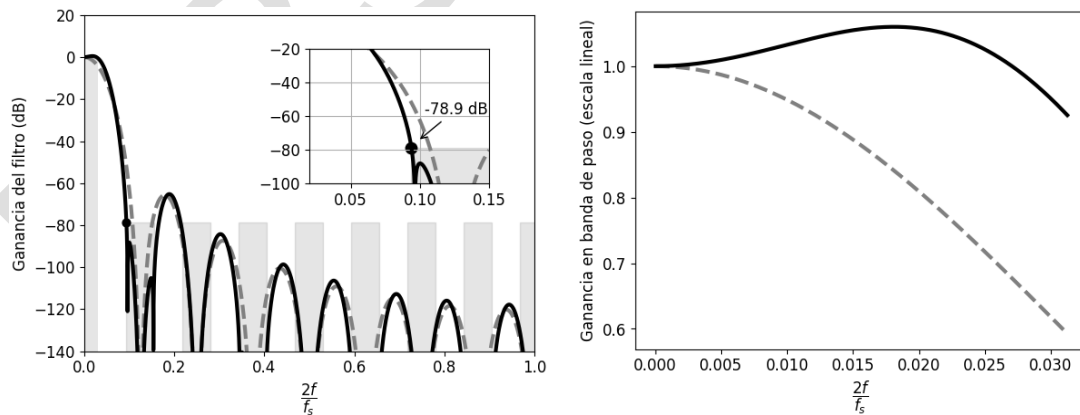


a) Amplitud (escala logarítmica) en todo el rango de frecuencias con detalle del peor caso de atenuación.

b) Amplitud (escala lineal) en la banda de paso.

Fuente: elaboración propia

Figura 4 Ganancia del filtro antialiasing formado por la cascada de  $N = 6$  Promediadores y una función de corrección de distorsión.

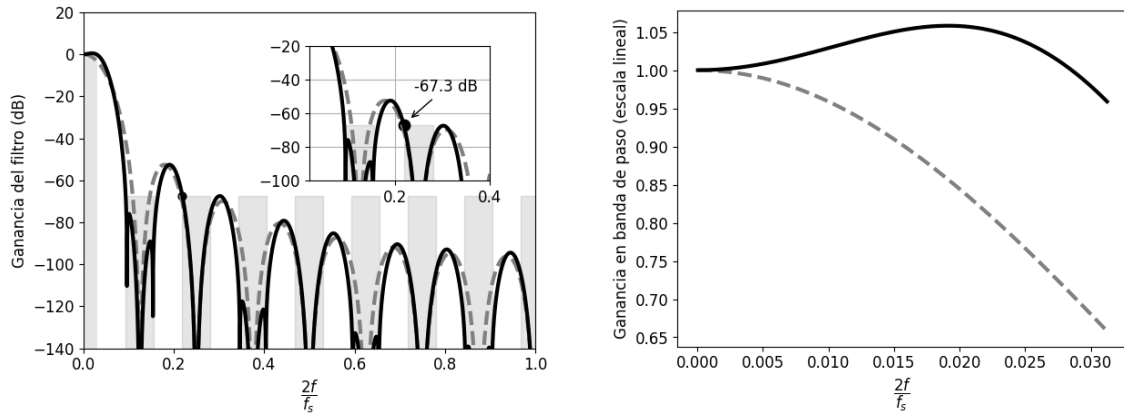


a) Amplitud (escala logarítmica) en todo el rango de frecuencias con detalle del peor caso de atenuación.

b) Amplitud (escala lineal) en la banda de paso.

Fuente: elaboración propia

Figura 5 Ganancia del filtro antialiasing formado por la cascada de  $N = 5$  promediadores, una función de corrección de distorsión y una de aumento de atenuación.



a) Amplitud (escala logarítmica) en todo el rango de frecuencias con detalle del peor caso de atenuación.

b) Amplitud (escala lineal) en la banda de paso.

Fuente: elaboración propia

Figura 6 Ganancia del filtro antialiasing formado por la cascada de  $N = 4$  promediadores, una función de corrección de distorsión y una función de aumento de atenuación.

Las Figuras 4b, 5b y 6b muestran los detalles en escala lineal de la ganancia en la banda de paso, respectivamente para las magnitudes de respuesta en frecuencia de las Figuras 4a, 5a y 6a. Todos los casos graficados corresponden a  $R = 16$ , y para comparar, también se presenta la ganancia de la cascada de promediadores (sin funciones coseno frecuenciales) en línea gris punteada. Finalmente, la Tabla 3 resume los valores de peor atenuación y los valores máximos de distorsión en la banda de paso para los casos anteriores.

Tabla 3 Valores de peor distorsión y de peor atenuación para  $R = 16$ .

Sistema de filtrado Cascada de:	Peor ganancia en banda de paso	Peor atenuación	Satisface - 60 dB
• $N = 4$ promediadores	0.66	- 41.7 dB	No
• $N = 4$ promediadores • Coseno corrector • Coseno atenuador	1.06	- 67.3 dB	Sí
• $N = 5$ promediadores	0.6	- 52.1 dB	No
• $N = 5$ promediadores • Coseno corrector • Coseno atenuador	0.93	- 78.9 dB	Sí
• $N = 6$ promediadores	0.53	- 62.5 dB	Sí
• $N = 6$ promediadores • Coseno corrector	0.93	- 57.7 dB	No

Fuente: elaboración propia.

## 4. Discusión

Al comparar la función de transferencia coseno (Ecuación 5) con la función promediadora (Ecuación 1), vemos que la primera tiene más baja complejidad que la segunda porque es una expresión mucho más simple (2 sumas vs  $R - 1$  sumas). A partir de las Tablas 1 y 2 podemos ver que los coeficientes  $d_1$  y  $d_2$  solamente están conformados por sumas de potencias de dos. Por lo tanto, en general la complejidad aritmética de las funciones coseno frecuenciales es baja. Esto contrasta favorablemente en comparación con el método de [Zhibin, Ruotong & Min, 2020], que requiere coeficientes de valores reales, optimizados para cada caso particular. Otra diferencia a favor de estas funciones es el hecho de que ellas tienen el parámetro  $L$ , que permite ser ajustado en función de  $R$ . Por lo tanto, no necesitan que  $R$  sea estrictamente par. Este caso no es posible en el método de [Zhibin, Ruotong & Min, 2020], donde el filtro de quinto orden debe funcionar estrictamente a una tasa de muestreo que debe ser exactamente  $(R/2)f_s$ , entonces esto implica que el factor de reducción  $R$  debe ser siempre par. De la Figura 3 y de la Tabla 3 podemos ver que un sistema de  $N = 6$  promediadores en cascada puede satisfacer el límite de  $-60$  dB de atenuación, pero tiene una gran distorsión de amplitud espectral en la banda de paso. En el peor caso, las frecuencias en esa banda pueden llegar a atenuarse hasta por la mitad de su valor, ya que la ganancia es 0.53 en el borde superior de esa banda. Si se utiliza una función coseno frecuencial en cascada con ese sistema para corregir su distorsión espectral (Figura 4 y Tabla 3), se logra que la peor ganancia que experimenten las señales en la banda de paso sea de 0.93, lo cual es mucho más aceptable que 0.53. Sin embargo, ahora el límite máximo de ganancia permisible para las bandas de rechazo,  $-60$  dB, se reduce a  $-57.7$  dB.

Por otra parte, de las Figuras 5 y 6 (específicamente con líneas punteadas), y de la Tabla 3, vemos que los sistemas con  $N = 4$  y  $N = 5$  promediadores en cascada no pueden satisfacer el límite de  $-60$  dB de atenuación. Además, estos sistemas también tienen una gran distorsión en la banda de paso, cuya ganancia disminuye hasta 0.66 y 0.6, respectivamente. Sin embargo, es interesante notar que, si la función de corrección de distorsión se usa en estos casos en conjunto con una

función coseno frecuencial para aumentar la atenuación, se pueden lograr ambas mejoras: la corrección de distorsión y el aumento de la atenuación por  $-25.6\text{ dB}$  cuando  $N = 4$ , o por  $-26.8\text{ dB}$  cuando  $N = 5$ . Esto se muestra en las Figuras 5 y 6 (específicamente con líneas sólidas) y en la Tabla 3.

El caso con  $N = 4$  es particularmente interesante. En él, cuando el sistema no usa funciones coseno frecuenciales, la ganancia ideal 1 se reduce hasta 0.66, entonces la máxima desviación a partir de la ganancia ideal en la banda de paso es de 0.34. Sin embargo, con la función de corrección de distorsión, esta diferencia se reduce a 0.06, es decir, más de cinco veces. Además, la función de aumento de atenuación provoca que el valor máximo de ganancia permisible para las bandas de rechazo se satisfaga dejando aún un margen de  $-7.3\text{ dB}$ .

## 5. Conclusiones

Las funciones coseno frecuenciales son una alternativa muy prometedora para formar los futuros filtros antialiasing basados en promediadores. Con una complejidad computacional menor que la de un promediador, ellas ayudan a reducir la cantidad de promediadores requeridos, corrigen la distorsión en la banda de paso y aumentan la atenuación. Además, no restringen que el factor  $R$  deba ser par. Como trabajo futuro, se desarrollarán arquitecturas de hardware para implementar estas funciones coseno frecuenciales.

## 6. Bibliografía y Referencias

- [1] Alsabah, M., Naser, M. A., Mahmmod, B. M., Abdulhussain, S. H., Eissa, M. R., Al-Baidhani, A., Noordin, N. K., Sait, S. M., Al-Utaibi, K. A., & Hashim, F. (2021). 6G Wireless Communications Networks: A Comprehensive survey. *IEEE Access*, 9, 148191–148243.
- [2] Buzzi, S., Ugolini, A., Zappone, A. & Colavolpe, G. (2016). An introduction to modulations and waveforms for 5G networks. In F.-L. Luo & C. Zhang (Eds.), *Signal Processing for 5G: Algorithms and Applications* (pp. 3-23). Wiley, West Sussex, UK.

- [3] Datta, D. & Dutta, H. S. (2024). Hardware optimized digital downconverter for multi-standard radio receiver. *Analog Integrated Circuits and Signal Processing*, 118, 567-575.
- [4] De la Rosa, J. M. (2023). Bandpass Sigma-Delta Modulation: The Path toward RF-to-Digital Conversion in Software-Defined Radio. *Chips*, 2(1), 44-69.
- [5] International Communications Union. (2017). Minimum requirements related to technical performance for IMT-2020 radio interface(s). International Communications Union – Radiocommunications Sector: Report ITU-R M.2410-0.
- [6] Mucchi, L. et al. (2023). Signal processing techniques for 6G. *Journal of Signal Processing Systems*, 95, 435-457.
- [7] Viswanathan, H. & Mogensen, P. E. (2020). Communications in the 6G era. *IEEE Access*, 8, 57063-57074.
- [8] Zeineddine, A., Nafkha, A., Paquelet, S., Moy, C., & Jezequel, P. Y. (2021). Comprehensive survey of FIR-based sample rate conversion. *Journal of Signal Processing Systems*, 93, 113-125.
- [9] Zhibin, L., Bo, G., Ruotong, Y. & Min, G. (2020). Efficient sharpening CIC filter embedding fifth-order filter with coefficient optimization algorithm. *Electronics Letters*, 56(23), 1241-1243.