APLICACIÓN DE MÉTODOS NORMALIZADOS PARA LA ESTIMACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE EN EL PROCESO DE CALIBRACIÓN DE UN CALIBRADOR DIGITAL

APPLICATION OF STANDARDIZED METHODS FOR UNCERTAINTY ESTIMATION IN THE CALIBRATION PROCESS OF A DIGITAL CALIBRATOR

Ricardo Medina Medina
Tecnológico Nacional de México / CRODE Celaya, México
ricardo.medina@crodecelaya.edu.mx

Luis Ángel Rodríguez Martínez
Tecnológico Nacional de México / CRODE Celaya, México
luis.rodriguez@crodecelaya.edu.mx

Aldo Hernández Guerrero
CENAM, México
ing.aldohdezgro@gmail.com

José Luis Rivera Ramírez
CENAM, México
jrivera@cenam.mx

Recepción: 22/noviembre/2024 **Aceptación:** 11/abril/2025

Resumen

Este artículo aborda la estimación de la incertidumbre de medida en el proceso de medición realizado durante la calibración de un calibrador digital, un instrumento de medición comúnmente utilizado en diversas áreas de la ingeniería y la metrología. Se analizaron los métodos normalizados para estimar la incertidumbre de medida, destacando las directrices establecidas por normas internacionales, tales como la ISO/IEC 17025 y la Guía para la expresión de la incertidumbre de medida. A través de un enfoque metódico, se describe el proceso de identificación y evaluación de las fuentes de incertidumbre involucradas en la calibración, así como las variaciones instrumentales, ambientales y procedimentales.

El articulo incluye un ejemplo práctico y cálculos que ilustran la aplicación de métodos normalizados para obtener una estimación precisa de la incertidumbre de medida. A fin de asegurar el control estadístico de las mediciones y la calidad de los resultados obtenidos se aplicó el error normalizado, obteniendo resultados consistentes entre los métodos aplicados.

Palabras Clave: Calibrador, Incertidumbre, Medición, Método, Metrología.

Abstract

This article addresses the estimation of measurement uncertainty in the measurement process carried out during the calibration of a digital caliper, a measuring instrument commonly used in various areas of enginnering and metrology. Standardized methods for determining uncertainty were analyzed, highlighting the guidelines established by international standards, such as ISO/IEC 17025 and the Guide for the expression of measurement uncertainty. Through a methodical approach, the process of identifying and evaluating the sources of uncertainty involved incalibration, as well as instrumental, environmental and procedural variations, in described.

The article includes a practical example and calculations that illustrate the application of standardized methods to obtain an accurate estimate of measurement uncertainty. To ensure the statistical control of the measurements and the quality of the results obtained, the normalized error was applied, yielding consistent results across the applied methods.

Keywords**:** *Calibrator, Measurement, Method, Metrology, Uncertainty.*

1. Introducción

La medición es un pilar fundamental en diversas disciplinas científicas, industriales y tecnológicas. Sin embargo, cualquier proceso de medición siempre está sujeto a determinada variación, es decir, una falta de exactitud en el valor medido, esto debido a diversos factores, como pueden ser las condiciones ambientales, el instrumento o equipo de medición, el operador, el método, entre otros elementos del proceso. La estimación de la incertidumbre de medida es esencial para interpretar correctamente los resultados de una medición y mejorar la toma de decisiones.

Existen diferentes métodos para estimar y cuantificar la incertidumbre de medida, entre los cuales destacan el Método de la ley de propagación de incertidumbres o mejor conocido como Método “GUM” (Guía para la Expresión de la Incertidumbre de la Medición) y el Método Monte Carlo (MMC), una técnica que utiliza modelos matemáticos para simular sistemas o proceso reales. Ambos métodos son herramientas útiles, pero tienen enfoques y aplicaciones distintas [JCGM GUM-1, 2023].

Se llevó a cabo una revisión bibliográfica de las fuentes relevantes sobre ambos métodos, incluyendo:

- Investigaciones sobre el Método Monte Carlo y su aplicación en la propagación de la incertidumbre de medida, con estudios donde se haya utilizado esta técnica [Castro, 2010].
- Revisión de normativas y estándares internacionales relacionados con la estimación de la incertidumbre de medida, como la “Guide to the Expression of Uncertainty Measurement” [JCGM 100, 2008] para la Ley de propagación de incertidumbres y el suplemento 1 de la GUM para el Método de Monte Carlo [JCGM 101, 2008].

Con el objetivo de aplicar ambos métodos en una situación práctica, se llevó a cabo un ejercicio de calibración de un calibrador digital, realizando una serie de mediciones bajo condiciones ambientales controladas, procedimientos estandarizados y métodos normalizados.

Para el Método “GUM”, se propagaron las incertidumbres a través de fórmulas analíticas, mientras que, para el Método Monte Carlo, se generaron números aleatorios de las variables de entrada dentro de sus errores máximos permitidos, para obtener el mejor estimado de la incertidumbre del mensurando y su distribución de probabilidad asociada.

El mensurando es considerado como la magnitud o propiedad que se desea medir [JCGM 200, 2012]. Una vez realizada la calibración, se compararon los resultados de cada método sobre el valor del mensurando y su incertidumbre asociada, aplicando el criterio del error normalizado para garantizar la confiabilidad de los resultados de la medición [Becerra, 2003], el criterio fue satisfactorio al obtener un valor del error normalizado menor a la unidad.

2. Métodos

El Método "GUM" aplica modelos matemáticos estructurados que combinan los efectos de las diferentes fuentes de error asociados a la medición. La idea central es representar la incertidumbre como una desviación estándar (o incertidumbre estándar) del mejor estimado de la medición (valor promedio), basada en una combinación de las incertidumbres de las variables de entrada.

Proceso de evaluación de la incertidumbre del Método "GUM":

- Modelo de medición: identifica las variables de entrada (X_i) que afectan el resultado de la medición, utilizando un modelo matemático que relaciona estas variables con el mensurando "Y", Ecuación 1. Donde f es la función de las magnitudes que contribuyen a la incertidumbre y X_i variables de entrada

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots . X_N) \tag{1}$$

- Valor estimado de las variables de entrada (X_i): la información puede provenir de un análisis estadístico, de una serie de observaciones o por fuentes externas, tales como valores asociados a patrones, certificados o valores de referencia tomados en publicaciones.
- Incertidumbre típica de las variables de entrada ($u(\bar{X})$): se evalúa la incertidumbre asociada a cada una de las variables de entrada. Las incertidumbres pueden ser clasificadas como Tipo A y Tipo B.

  La incertidumbre Tipo A proviene de la repetibilidad de las mediciones y se manifiesta como la desviación típica experimental. El mejor estimado de la variable de entrada ($\bar{X}$) queda definido por la Ecuación 2 y su incertidumbre asociada por la Ecuación 3.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{n} \tag{2}$$

$$u(\bar{X}) = \frac{s(x_i)}{\sqrt{n}} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2}{n-1}}{\sqrt{n}} \tag{3}$$

Donde x_i son las variables de entrada, n número de mediciones realizadas y $s(x_i)$ ña desviación típica experimental de la media.

La incertidumbre Tipo B es obtenida por medios diferentes a una medición, es basada en la información disponible acerca de la posible variabilidad de las variables de entrada, la información puede provenir de los resultados de mediciones anteriores, experiencia del operador, especificaciones del fabricante, incertidumbres asignadas previamente, entre otros. Las distribuciones de probabilidad más usuales en la incertidumbre tipo B son: la rectangular y la triangular. En el caso de contar con límites (inferior y superior) para una variable de entrada con igual probabilidad de ocurrencia, la incertidumbre queda definida por Ecuación 4 (distribución rectangular). Donde $u(x_i)$ es ña incertidumbre de la variable de entrada, a_+ el límite superior, a_- el límite inferior y a la amplitud del intervalo. Cuando los valores cercanos a los límites de una variable de entrada son menos probables que los situados en el centro, es posible reemplazar la distribución rectangular por una distribución triangular, así la incertidumbre queda definida por Ecuación 5.

$$u(x_i) = \frac{(a_+ - a_-)}{\sqrt{12}} = \frac{a}{\sqrt{3}} \tag{4}$$

$$u(x_i) = \frac{(a_+ - a_-)}{\sqrt{24}} = \frac{a}{\sqrt{6}} \tag{5}$$

- Resultado de medición (y): Determinar el mejor estimado del mensurando, considerado en algunos casos como la media aritmética de las "n" determinaciones independientes del mensurando, como en la Ecuación 6.

$$y = \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_{1,k}, X_{2,k}, \dots, X_{N,k}) \tag{6}$$

Donde $\bar{Y}$ es la media aritmética, Y_k la determinación independiente del mensurando y $X_{i,k}$ los valores observados de las magnitudes de entrada.

- Incertidumbre típica combinada ($u_c(y)$): Se combinan las incertidumbres de las variables de entrada utilizando el modelo de propagación que depende de si las incertidumbres son independientes o correlacionadas. Considerando que las variables de entrada son independientes y no correlacionadas, la incertidumbre típica del mensurando "y", mejor conocida como incertidumbre estándar combinada, se obtiene multiplicando las incertidumbres de las variables de entrada $u(x_i)$ por sus coeficientes de sensibilidad $\left(\frac{\delta f}{\delta x_i}\right)$, Ecuación 7. N es el número de variables de entrada.

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\left[\frac{\delta f}{\delta x_i} \right] \cdot \, u(x_i) \right)^2} \tag{7}$$

- Incertidumbre expandida (U): El resultado final es una incertidumbre estándar combinada que se expresa con un nivel de confianza determinado, comúnmente reconocida como incertidumbre expandida, esto para cubrir intervalos de confianza mayores. La incertidumbre expandida se representa por la letra "U" mayúscula y se obtiene de una multiplicación, como se muestra en la Ecuación 8. Donde k es el factor de cobertura.

$$U = k \;\, u_c(y) \tag{8}$$

El nivel de confianza requerido por la medición es asociado con el valor del factor de cobertura k, suponiendo que $k = 2$, esto representaría un nivel de confianza de aproximadamente el 95% de que el valor verdadero del mensurando se encuentre dentro de estos parámetros de incertidumbre. La Tabla 1 muestra la correspondencia entre el nivel de confianza y el factor de cobertura.

Tabla 1 Valor del factor de cobertura k.

Nivel de confianza p **(%)**	**Factor de cobertura** k
68.27	1.000
90.00	1.645
95.00	1.960
95.45	2.000
99.00	2.576
99.73	3.000

Fuente: Anexo G, GUM:1995, 2008.

El Método Monte Carlo es una técnica estadística basada en la simulación numérica que utiliza la aleatoriedad para resolver problemas matemáticos complejos o procesos de medición costosos. En el contexto de la estimación de incertidumbre, Monte Carlo se utiliza para simular un gran número de experimentos que reflejan las variaciones aleatorias en las mediciones y estimar la incertidumbre asociada al proceso de medición o mensurando.

Proceso del Método Monte Carlo para estimar la incertidumbre de una medición:

- Formulación: Definir el mensurando, las variables de entrada y el modelo matemático. Posteriormente, se asignan las Funciones de Densidad de Probabilidad (Gaussiana, rectangular, triangular, etc) por cada variable de entrada. Cada fuente de incertidumbre se modela como una distribución de probabilidad, incluyendo distribuciones normales, uniformes, rectangulares, entre otras, según la naturaleza de la medición e información proporcionada.
- Propagación: Se propagan las Funciones de Densidad de Probabilidad (FDP) de las variables de entrada de acuerdo con su naturaleza. Para ello será necesario generar muestras aleatorias para cada una de las variables, basándose en las distribuciones de probabilidad definidas en el paso anterior, por cada conjunto de muestras generadas y utilizando el modelo matemático correspondiente, se calcula un mensurando.
- Resumen: Del conjunto de valores que adopta el mensurando se calcula la media aritmética, este parámetro es considerado como el mejor estimado de la medición y su desviación típica (estándar) es considerada como la incertidumbre típica asociada al mensurando.

3. Resultados

A continuación, se desarrolla la metodología de la propagación de incertidumbres aplicada a un ejercicio de calibración de un calibrador Marca Phase II, Modelo 920-356, No. Serie 27120322240, Alcance $150\,mm$, Resolución $0.01\,mm$, cabe mencionar que para la calibración se utilizó un Bloque Patrón de acero con longitud nominal $100\,mm$, grado 1, Marca Mitutoyo, No. Serie 182401, con una Inc. Expandida de $9.7x10^{-5}\,mm$ y No. de certificado MTKD-2110384:

- Modelo de medición: Para efectos del artículo, el mensurando se definió como la corrección de la lectura en el calibrador, que representa la diferencia entre la longitud del Bloque Patrón (BP) y la lectura del calibrador [González, 2001], el alcance de la calibración se limitó a los $100\,mm$ y el modelo del mensurando se muestra en la Ecuación 9.

$$e = L_c - L_{Bp} + L_{Bp} * \propto_{Bp} * \delta_T + L_c * \Delta_T * \delta_\alpha \quad (9)$$

Donde:

e : Mensurando

L_c : Promedio de lecturas del calibrador

L_{Bp}: Longitud del BP

$\propto_{Bp}$: Coeficiente de expansión volumétrico del BP

δ_T : Diferencia de temperatura entre el BP y el calibrador

Δ_T : Diferencia máxima entre la temperatura de medición y la de referencia

δ_α:Diferencia del coeficiente de expansión volumétrico del BP y Calibrador.

El modelo matemático para determinar la incertidumbre debida a la lectura del calibrador se expresa en la Ecuación 10 y e el Error de Abbe se determina mediante la Ecuación 11.

$$L_c = E_{\bar{I}} + E_{Abbe} + E_{paralelismo} + E_{resolución} \quad (10)$$

$$E_{abbe} = \frac{h\,a}{L} \quad (11)$$

Donde:

$E_{\bar{I}}$: Error del promedio de lecturas

E_{Abbe} : Error de Abbe

$E_{paralelismo}$: Error por paralelismo

$E_{resolución}$: Error por resolución

h : Huelgo entre el cursor y la regla de medición

a : Altura de las puntas de medición externas

L : Longitud del cursor

- Valor estimado de las variables de entrada (X_i): las mediciones realizadas con el calibrador en el alcance de $100\,mm$ se muestran en la Tabla 2, considerando la media aritmética con $n = 10$. Se realizó una prueba para determinar el paralelismo en las caras de medición del calibrador, efectuando una serie de mediciones sobre la parte inferior, media y superior de las puntas del calibrador para medición de exteriores. Los resultados se muestran en la Tabla 3, se consideró $n = 9$ para esta prueba. El valor estimado de las variables de entrada se muestra en la Tabla 4.

Nota: El incremento Δ_T es la diferencia máxima que se presenta entre la temperatura de calibración y la temperatura de referencia, la temperatura inicial de calibración fue de $19.5\ °C$ y la final de $19.75\ °C$, el valor de referencia en temperatura es de $20\ °C$, por lo anterior, la mayor diferencia se presenta con la temperatura inicial, y el incremento queda como: $\Delta_T = 0.5\ °C$

- Incertidumbre típica de las variables de entrada ($u(X_i)$). En la Tabla 5, se muestra la relación de incertidumbres típicas asociadas a las variables de entrada para el modelo matemático de la lectura del calibrador (expresado en la Ecuación 10). La estimación de incertidumbre fue determinada con Ecuaciones 3 y 4.

Tabla 2 Mediciones realizadas con el calibrador digital.

No de lecturas (x_i)	**Medición (mm)**
1	99.81
2	99.80
3	99.80
4	99.80
5	99.81
6	99.80
7	99.79
8	99.79
9	99.81
10	99.79
Promedio, L_c	99.80
Desviación estándar, S	**0.008 1**

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 3 Mediciones para prueba de paralelismo.

Nivel	**No. De medición por nivel**				
	1	**2**	**3**	**Promedio de valores**	**Desv. Est. ($S_{paralelismo}$)**
Inferior	$99.79\ mm$	$99.80\ mm$	$99.80\ mm$	$99.79\ mm$	$0.007\ mm$
Media	$99.80\ mm$	$99.79\ mm$	$99.80\ mm$		
Superior	$99.79\ mm$	$99.79\ mm$	$99.78\ mm$		

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 4 Cuantificación de las variables de entrada.

Variable de entrada	Relación	Constantes	Valor
L_c	Ecuación 2	$n = 10$	$99.80\ mm$
E_{abbe}	Ecuación 11	$h = 40\ mm, a = 0.01\ mm,$ $L = 60\ mm$	$0.006\ 6\ mm$
L_{Bp}	n/a	$100\ mm$	$100\ mm$
$\propto_{Bp}$	n/a	$1.08x10^{-5}\ °C^{-1}$	$1.08x10^{-5}\ °C^{-1}$
δ_T	n/a	$0.2\ °C$	$0.2\ °C$
Δ_T	$= T_x - T_{ref}$	$T_{ref} = 20\ °C$	$0.5\ °C$
δ_α	$= \lvert \propto_{Bp} - \propto_{Lc} \rvert$	$\propto_{Lc} = 1.16x10^{-5}\ °C^{-1}$	$8x10^{-7}\ °C^{-1}$

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 5 Cuantificación de las variables de entrada para la Lectura del calibrador.

Variables de entrada	Relación	Tipo	Incertidumbre
$u_{E,repetibilidad}$	$= \frac{0.008\ 1}{\sqrt{10}}$	A	$0.002\ 6\ mm$
$u_{E,abbe}$	$\frac{0.006\ 6}{\sqrt{3}}$	B	$0.003\ 8\ mm$
$u_{E,paralelismo}$	$\frac{0.007}{\sqrt{9}}$	A	$0.002\ 3\ mm$
$u_{E,resolución}$	$\frac{0.01 - 0}{\sqrt{12}}$	B	$0.002\ 8\ mm$

Fuente: Elaboración propia.

Para determinar la incertidumbre del mensurando fueron considerados los valores de las variables de entrada que se encuentran en la Tabla 4 y las incertidumbres asociadas a las variables de entrada que se establecieron en la Tabla 5. Por lo anterior la relación de incertidumbres asociadas al mensurando se ubica en la Tabla 6.

- Resultado de medición (y). El mejor estimado del mensurando se obtiene utilizando la Ecuación 9 y los valores de la Tabla 4. La corrección en la lectura del calibrador en un alcance de $100\ mm$ se muestra en la Tabla 7.
- Incertidumbre típica combinada ($u_c(y)$). Para la incertidumbre combinada fue necesario obtener los coeficientes de sensibilidad, determinados por las derivadas parciales de las variables de entrada respecto al mensurando, Tabla 8.

Tabla 6 Valor de incertidumbres de las variables de entrada.

Incertidumbres	Relación	Incertidumbre
u_{Lc}	$= \sqrt{(0.002\,6)^2 + (0.003\,8)^2 + (0.002\,3)^2 + (0.002\,8)^2}$	$0.005\,9\ mm$
$u_{L_{Bp}}$	$= \frac{9.7x10^{-5}\ mm}{2}$	$0.000\,04\ mm$
$u_{\propto_{Bp}}$	$= \frac{10\ \%\ \cdot 1.08x10^{-5}\ °C^{-1}}{\sqrt{3}}$	$6.24x10^{-7}\ °C^{-1}$
u_{δ_T}	$= \frac{0.2\ °C}{\sqrt{3}}$	$0.115\,4\ °C$
$u_{\Delta T}$	$= \frac{0.5\ °C}{\sqrt{3}}$	$0.288\,6\ °C$
$u_{\delta_\propto}$	$= \frac{10\ \%\ \cdot 8x10^{-7}\ °C^{-1}}{\sqrt{3}}$	$4.61x10^{-8}\ °C^{-1}$

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 7 Mejor estimado del mensurando.

Mensurando	Mejor estimado
e	$-0.199\,7\ mm$

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 8 Coeficientes de sensibilidad (C_i) del modelo matemático.

$C_i = \delta f\ /\ \delta x_i$	Relación	Valor, C_i
$\delta e\ /\ \delta L_c$	$= 1 + \Delta T * \delta_\alpha$	$1.000\,000\,4$
$\delta e\ /\ \delta L_{Bp}$	$= -1 + \alpha_{Bp} * \delta_T$	$-0.999\,997\,8$
$\delta e\ /\ \delta \propto_{Bp}$	$= L_{Bp} * \delta_T$	$20\ mm\ °C$
$\delta e\ /\ \delta\delta_T$	$= L_{Bp} * \alpha_{Bp}$	$1.08x10^{-3}\ mm/°C$
$\delta e\ /\ \delta\Delta_T$	$= L_c * \delta_\alpha$	$7.98x10^{-5}\ mm/°C$
$\delta e\ /\ \delta\delta_\alpha$	$= L_c * \Delta T$	$49.9\ mm\ °C$

Fuente: Elaboración propia.

Utilizando como base la Ecuación 7, los C_i de la Tabla 8 y las incertidumbres de la Tabla 6, tenemos que la incertidumbre combinada (u_c) es igual a $0.005\,949\ mm$, la expresión del modelo queda definida en la Ecuación 12.

$$u_c = \sqrt{\begin{aligned} &\left[\left(\frac{\delta e}{\delta L_c}\right)\cdot(u_{Lc})\right]^2 + \left[\left(\frac{\delta e}{\delta L_{Bp}}\right)\cdot\left(u_{L_{Bp}}\right)\right]^2 + \left[\left(\frac{\delta e}{\delta \propto_{Bp}}\right)\cdot\left(u_{\propto_{Bp}}\right)\right]^2 \\ &+ \left[\left(\frac{\delta e}{\delta\delta_T}\right)\cdot\left(u_{\delta_T}\right)\right]^2 + \left[\left(\frac{\delta e}{\delta\Delta_T}\right)\cdot(u_{\Delta T})\right]^2 + \left[\left(\frac{\delta e}{\delta\delta_\alpha}\right)\cdot\left(u_{\delta_\propto}\right)\right]^2 \end{aligned}} \tag{12}$$

- Incertidumbre expandida (U). Para el cálculo de la incertidumbre expandida será necesario conocer el factor de cobertura k, para fines prácticos del ejercicio se consideró un $k = 2$ equivalente al 95.45% del nivel de confianza. El resultado de la incertidumbre expandida se obtiene mediante Ecuación 8.

$$U = 0.0119\ mm$$

Por lo tanto, el resultado de la medición se puede expresar por el conjunto del mejor estimado del mensurando (y) y su incertidumbre expandida (U) [JCGM 100, 2008, 7], como:

$$e = -0.1997\ mm\ \ y\ \ U = 0.0119\ mm$$

Metodología del Método Monte Carlo aplicada para el mismo ejercicio de calibración del calibrador en el alcance de $100\ mm$.

- Formulación. En el paso número uno se utilizó como base la Ecuación 9 y considerando que L_c está en función de los errores de medición, el mensurando y las variables de entrada para el Método Monte Carlo queda definido por el modelo matemático según se muestra en la Ecuación 13.

$$\begin{gathered} e = E_{\bar{I}} + E_{Abbe} + E_{paralaje} + E_{paralelismo} + E_{resolución} - L_{Bp} + L_{Bp} \propto_{Bp} \delta_T \\ +\left(E_{\bar{I}} + E_{Abbe} + E_{paralaje} + E_{paralelismo} + E_{resolución}\right) \Delta_T \delta_\alpha \end{gathered} \tag{13}$$

- Propagación. En el paso número dos fue necesario simular números aleatorios de cada variable de entrada (utilizando la herramienta de Excel) de acuerdo con su FDP, en la Tabla 9 se muestra el resumen de las incertidumbres y valores asociados a cada variable de entrada, para ello se considero la información de las Tablas 4 y 6.

Tabla 9 Valores e incertidumbres de las variables de entrada MMC.

Variables	Valor	Incertidumbre	FDP	Lim. Sup.	Lim. Inf.
$E_{\bar{I}}$	$99.80\ mm$	$0.002\ 6\ mm$	Normal	$99.802\ 6\ mm$	$99.797\ 4\ mm$
E_{Abbe}	$0.006\ 6\ mm$	$0.003\ 8\ mm$	Rectangular	$0.003\ 8\ mm$	$-0.003\ 8\ mm$
$E_{paralelismo}$	0	$0.002\ 4\ mm$	Rectangular	$0.002\ 4\ mm$	$-0.002\ 4\ mm$
$E_{resolución}$	$0.01\ mm$	$0.002\ 9\ mm$	Rectangular	$0.002\ 9\ mm$	$-0.002\ 9\ mm$
L_{Bp}	$100\ mm$	$4.85x10^{-5}\ mm$	Normal	$100.000\ 04\ mm$	$99.999\ 9\ mm$
$\propto_{Bp}$	$1.08x10^{-5}\ °C^{-1}$	$6.24x10^{-7}\ °C^{-1}$	Rectangular	$1.14x10^{-5}\ °C^{-1}$	$1.02x10^{-5}\ °C^{-1}$
δ_T	$0.2\ °C$	$0.115\ 5\ °C$	Rectangular	$0.315\ 5\ °C$	$0.084\ 5\ °C$
Δ_T	$0.5\ °C$	$0.288\ 7\ °C$	Rectangular	$0.788\ 7\ °C$	$0.211\ 3\ °C$
δ_α	$8x10^{-7}\ °C^{-1}$	$4.619x10^{-8}\ °C^{-1}$	Rectangular	$8.462x10^{-7}\ °C^{-1}$	$7.53x10^{-7}\ °C^{-1}$

Fuente: Elaboración propia.

Las funciones utilizadas en Excel para simular los valores de cada variable de acuerdo con su FDP se muestran en la Tabla 10.

Tabla 10 Funciones en Excel para cada variable de entrada.

Variable de entrada	**FDP**	**Fórmula matemática en Excel**
$E_{\bar{I}}$	Gaussiana (normal)	$= DISTR.NORM.INV(ALEATORIO();99.80;0.002\,6)$
E_{Abbe}	Rectangular (uniforme)	$= -0.003\,8 + \left(0.003\,8 - (-0.003\,8)\right) * ALEATORIO()$
$E_{paralelismo}$	Rectangular (uniforme)	$= -0.002\,4 + \left(0.002\,4 - (-0.002\,4)\right) * ALEATORIO()$
$E_{resolución}$	Rectangular (uniforme)	$= -0.002\,9 + \left(0.002\,9 - (-0.002\,9)\right) * ALEATORIO()$
L_{Bp}	Gaussiana (normal)	$= DISTR.NORM.INV(ALEATORIO();100;4.85X10^{-5})$
$\propto_{Bp}$	Rectangular (uniforme)	$= 1.02x10^{-5} + (1.14x10^{-5} - 1.02x10^{-5}) * ALEATORIO()$
δ_T	Rectangular (uniforme)	$= 0.084\,5 + (0.315\,5 - 0.084\,5) * ALEATORIO()$
Δ_T	Rectangular (uniforme)	$= 0.211\,3 + (0.788\,7 - 0.211\,3) * ALEATORIO()$
δ_α	Rectangular (uniforme)	$= 7.53x10^{-7} + (8.46x10^{-7} - 7.53x10^{-7}) * ALEATORIO()$

Fuente: Elaboración propia.

- Resumen. En el paso número tres del MMC, se realizó la simulación de más de $50\,000$ números aleatorios por cada variable de entrada, por cada valor de la variable de entrada se determina un valor del mensurando, generando así, más de $50\,000$ valores posibles para el mensurando.

  El mejor estimado de la medición por el Método Monte Carlo está conformado por el promedio de los posibles valores que adopto el mensurando y la incertidumbre típica por su desviación estándar del conjunto de valores del mensurando: $e = -0.199\,7\,mm$ y $u = 0.004\,0\,mm$,

Como control estadístico de la medición y a fin de evaluar la consistencia de los resultados con ambos métodos, se utilizó como herramienta estadística el error normalizado, definido por la Ecuación 14.

$$E_N = \frac{|y_{GUM} - y_{MMC}|}{\sqrt{{u_{GUM}}^2 + {u_{MMC}}^2}} \tag{14}$$

Donde:

E_N : Error normalizado

y_{GUM} : Mejor estimado del mensurando, método GUM

y_{MMC} : Mejor estimado del mensurando, método MMC

u_{GUM} : Incertidumbre típica combinada, método GUM

u_{MMC} : Incertidumbre típica, método MMC

La consistencia entre el valor del mensurando obtenido con el método GUM y el valor obtenido por el MMC debe cumplir con el siguiente criterio:

- $E_N \leq 1$ los valores encontrados por ambos métodos son consistentes
- $E_N > 1$ los valores encontrados por ambos métodos no son consistentes entre sí.

Los resultados obtenidos por ambos métodos se resumen en la Tabla 11, y utilizando la Ecuación 14 se determina que el error normalizado es menor a uno y por lo tanto los resultados son consistentes entre si.

Tabla 11 Resultados de la medición por ambos métodos.

Método	**Mensurando** (e)	**Incertidumbre estándar** (u)	**Error normalizado (**E_N**)**	**Criterio Satisfactorio** $(E_N < 1)$
GUM	$-0.199\,74\ mm$	$0.005\,9\ mm$	$0.004\ mm$	$0.004 \leq 1$, Consistente
MMC	$-0.199\,77\ mm$	$0.004\,0\ mm$		

Fuente: Elaboración propia.

Algunas ventajas del Método “GUM” es que es ampliamente aceptado por su aplicación estandarizada, sin embargo, tiene algunas limitaciones:

- Requiere modelos matemáticos detallados, que en ocasiones no están disponibles o son demasiado complejos.
- Es necesario conocer la distribución de probabilidad de las fuentes de incertidumbre, lo que a veces puede ser difícil de obtener.

El Método Monte Carlo tiene como ventaja principal que no requiere una fórmula analítica para la propagación de la incertidumbre, lo que lo hace útil para modelos complejos y no lineales. Permite modelar incertidumbres con distribuciones arbitrarias, lo que proporciona mayor flexibilidad. Sin embargo, también presenta ciertas limitaciones:

- Requiere una considerable capacidad computacional, ya que el número de simulaciones debe ser suficientemente grande para obtener resultados precisos.
- El número de iteraciones a realizar con el Método Monte Carlo debe ser mayor a $1x10^6$, esto suele proporcionar un intervalo de cobertura del 95% aproximadamente para el mensurando.

4. Discusión

El método GUM es mayormente utilizado debido a su estandarización y aceptación en laboratorios de metrología, es rigurosamente estructurado y es adecuado cuando las incertidumbres de las variables de entrada son conocidas y se pueden describir de forma analítica, como en sistemas simples o lineales. Sin embargo, sus limitaciones incluyen la necesidad de un modelo matemático detallado, lo cual no siempre está disponible o puede ser demasiado complejo, además la estimación de la incertidumbre puede resultar complicada cuando el sistema es no lineal o existen variables correlacionadas.

Por otro lado, el Método Monte Carlo destaca en situaciones donde el sistema de medición es complejo o no lineal, o cuando las distribuciones de probabilidad asociadas a las variables de entrada son difíciles de definir, este método no requiere de una formulación matemática para la propagación de la incertidumbre, lo que lo hace flexible, ya que permite modelar incertidumbres con distribuciones arbitrarias, pero tiene la desventaja de requerir una cierta capacidad computacional, ya que las simulaciones deben realizarse con un número suficientemente grande de iteraciones ($más\ de\ 1\ millón$, en algunos casos) para obtener resultados precisos, lo que podría implicar tiempos de cálculo más largos en comparación con el otro método.

En el Método GUM, se calculó una incertidumbre típica combinada igual a $0.0059\ mm$, mientras que en el Método Monte Carlo resulto una incertidumbre de $0.0040\ mm$. Este diferencial en los resultados puede explicarse por la naturaleza del proceso de simulación Monte Carlo, la precisión del método, la variabilidad de la incertidumbre o que el modelo MMC ha capturado con más detalle ciertos aspectos del proceso que no están siendo reflejados por el enfoque analítico de la ley de propagación de incertidumbres.

Para garantizar el control estadístico de la medición se aplicó el Error Normalizado como herramienta estadística para demostrar la consistencia en los resultados, se determino un error normalizado menor a uno, lo que significa que los resultados son consistente entre sí, ambos resultados son válidos.

5. Conclusiones

Tanto el Método "GUM" como el Método Monte Carlo son herramientas valiosas para la estimación de la incertidumbre de medida, pero su elección depende de la complejidad del sistema de medición y de la naturaleza de las variables de entrada. El Método "GUM" es muy adecuado para mediciones simples, donde se pueden aplicar fórmulas analíticas, mientras que el Método Monte Carlo ofrece mayor flexibilidad y potencia en casos más complejos y cuando las distribuciones de probabilidad no siguen formas estándar. La combinación de ambos enfoques puede ser también una estrategia efectiva en situaciones donde se busca una estimación robusta y precisa de la incertidumbre. El análisis y la comparación de los métodos GUM y Monte Carlo proporcionan una visión detallada de cómo se pueden abordar las estimaciones de incertidumbre en diferentes contextos de medición, se subraya la importancia de evaluar y seleccionar adecuadamente el método de estimación de incertidumbre en función de las características del sistema de medición y el contexto de la aplicación, lo que permitirá una mejor interpretación de los resultados y, en última instancia, una toma de decisiones más informada.

6. Bibliografía y Referencias

[1] Becerra L.O., Control Estadístico de las Mediciones. Diplomado de Estadística, Módulo 2. CENAM. 2003. https://www.cenam.mx/myd/pages/publicaciones/articulos/doc/Control%20Estad.pdf.

[2] Castro J.L., Bouchot C. Propagación de incertidumbres, un enfoque evolutivo. Simposio de Metrologia - CENAM. 2010. https://www.cenam.mx/sm2010/info/carteles/sm2010-c16.pdf.

[3] González H. Incertidumbre en la calibración de calibradores tipo vernier. CENAM. 2001. https://www.cenam.mx/publicaciones/.

[4] Joint Committe for Guides in Metrology (JCGM). JCGM 100:2008. Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement (1ra ed.). Bureau International des Poids et Mesures. 2008. https://www.bipm.org/documents/20126/2071204/JCGM_100_2008_E.pdf/cb0ef43f-baa5-11cf-3f85-4dcd86f77bd6.

[5] Joint Committe for Guides in Metrology (JCGM). JCGM 101:2008. Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" – Propagation of distributions using a Monte Carlo method (1ra ed.). Bureau International des Poids et Mesures. 2008. https://www.bipm.org/documents/20126/2071204/JCGM_101_2008_E.pdf/325dcaad-c15a-407c-1105-8b7f322d651c.

[6] Joint Committe for Guides in Metrology (JCGM). JCGM 200:2012. Vocabulario Internacional de Metrología – Conceptos fundamentales y generales, y términos asociados (3ra ed.). Bureau International des Poids et Mesures. 2012. https://www.cem.es/sites/default/files/vim-cem-2012web_0.pdf.

[7] Joint Committe for Guides in Metrology (JCGM). JCGM GUM-1:2023. Guide to the expression of uncertainty in measurement — Part 1: Introduction (1ra ed.). Bureau International des Poids et Mesures. 2023. https://www.bipm.org/documents/20126/2071204/JCGM_GUM-1.pdf/74e7aa56-2403-7037-f975-cd6b555b80e6.