

# INTERFAZ GRÁFICA PARA LA OBTENCIÓN DE LOS EXPONENTES DE LYAPUNOV EN SISTEMAS CAÓTICOS DE ORDEN FRACCIONAL

*GRAPHICAL INTERFACE FOR OBTAINING  
LYAPUNOV EXPONENTS IN FRACTIONAL  
ORDER CHAOTIC SYSTEMS*

**Ramon Ulises Almada Prieto**

Instituto Politécnico Nacional, México  
*ramon\_ulises@citedi.mx*

**José Cruz Núñez Pérez**

Instituto Politécnico Nacional, México  
*nunez@citedi.mx*

**Gilberto Enrico Vázquez Alcaraz**

Tecnológico Nacional de México / IT de Tijuana, México  
*gilberto.vazquez@tectijuana.edu.mx*

**Recepción:** 21/noviembre/2024

**Aceptación:** 27/diciembre/2024

## Resumen

En este artículo se desarrolla y diseña una interfaz gráfica de usuario en Matlab utilizando la herramienta Guide capaz de resolver y graficar sistemas caóticos de orden fraccional desde 3 hasta 5 variables distintas, obtener los exponentes de Lyapunov del sistema, así como su grafica de bifurcación y los puntos de equilibrio del mismo. Para lograr lo anterior se utiliza el método numérico de Adam-Bashforth-Moulton para resolver sistemas caóticos del mismo o diferente orden fraccional, así como el algoritmo de Benettin-Wolf para obtener los exponentes de Lyapunov en sistemas caóticos de orden fraccional. Finalmente, se presentan los resultados de cada una de las simulaciones para dos osciladores caóticos de orden fraccional distintos: el oscilador de Lorenz y el de Chen. La importancia de calcular los exponentes de Lyapunov de un sistema radica en que, dichos resultados indican si el sistema posee un comportamiento caótico ante ciertos parámetros de simulación.

**Palabras Clave:** ABM, Caos, Exponentes de Lyapunov, GUI, Orden fraccional.

## **Abstract**

*In this article develop and design a graphical user interface in Matlab using the Guide tool. This interface is capable of solving and graphing fractional order chaotic systems with 3 to 5 different variables, obtaining the Lyapunov exponents of the system, as well as its bifurcation graph and equilibrium points. To achieve this, the numerical method of Adam-Bashforth-Moulton is used to solve chaotic systems of the same or different fractional orders, along with the Benettin-Wolf algorithm to obtain the Lyapunov exponents in fractional order chaotic systems. Finally, the results of each simulation are presented for two different fractional order chaotic oscillators: the Lorenz oscillator and the Chen oscillator. The importance of calculating the Lyapunov exponents of a system lies in the fact that these results indicate whether the system exhibits chaotic behavior under certain simulation parameters.*

**Keywords:** *ABM, Chaos, Fractional order, GUI, Lyapunov exponents.*

## **1. Introducción**

En 1695, con el comienzo del cálculo diferencial e integral, Leibniz proponía a L'Hopital la posibilidad de realizar derivaciones e integraciones en el orden de los números no enteros, a lo que L'Hopital concluía que esto conduciría a una paradoja y de lograrlo, se obtendrían resultados para aplicaciones en el futuro [Vinagre, 2016]. Con el pasar de los años solo unos cuantos científicos trataron este tema, tal es el caso de Sylvester François Lacroix quien en 1819 hizo la primera referencia en un texto a la derivada de orden arbitrario, considerando este tema como un mero ejercicio matemático. En 1823 surgió la primera aplicación del cálculo fraccional por Niels Henrik Abel, quien resolvió el problema de encontrar la forma de una curva, donde un objeto que se desliza por ella sin rozamiento y llega al final de su recorrido en un tiempo independientemente del punto de partida. Para esto Abel utilizó una derivada de orden  $\frac{1}{2}$  [Bahar, 2020], [Junfeng, 2022], [Sánchez-Muñoz, 2011]. Motivado por la solución propuesta por Abel, en 1832 Liouville hizo el primer intento de definir la derivada fraccional, la cual, si bien era funcional, poseía ciertas restricciones debido a la convergencia de la serie. Posteriormente, en 1847,

Riemann modificó el operador fraccionario de Liouville, dando lugar a la integral fraccionaria de Riemann-Liouville [Sánchez-Muñoz, 2011].

Durante el siglo XX con el desarrollo de análisis matemáticos y teoría de funciones, aparecieron nuevas definiciones de operadores fraccionarios. En 1967 Caputo presentó la definición de derivada fraccional basado en Riemann-Liouville. Y con ello interpretar físicamente las condiciones iniciales de los problemas con ecuaciones diferenciales fraccionarias, dando lugar a la derivada fraccional de Caputo [Almeida, 2010]. En 1974 se publicó el primer libro dedicado llamado “The Fractional Calculus” por Keith B Oldham [Vinagre, 2016].

Por otro lado, en el siglo XV, René Descartes afirmaba que con suficientes datos todo fenómeno podía explicarse, negando el azar y describiendo el universo como un sistema caótico [Cisneros, 2010]. En 1963, Edward Lorenz descubrió el caos mientras trabajaba en un modelo climático. Al redondear sus cálculos a tres decimales, notó que los resultados divergían con el tiempo, mostrando la sensibilidad del sistema a las condiciones iniciales [Cang, 2017].

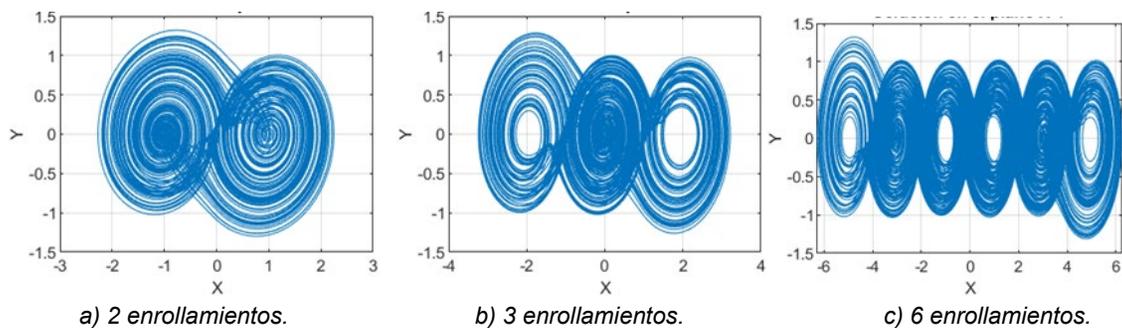
Posteriormente en 1966, M. Lyapunov realizó el primer estudio de la relación entre los valores del Jacobiano de un sistema dinámico y su estabilidad estructural, obteniendo así los exponentes de Lyapunov (*LEs*) [García-Meza, 1993]. Los *LEs* son de gran utilidad, donde si algún exponente es positivo el sistema es divergente [Dubeibe, 2013], cada sistema caótico posee un distinto grado de sensibilidad ante cambios en las condiciones iniciales. En la década de los noventa, gracias a las investigaciones de Lorenz y las nuevas tecnologías, se obtuvieron resultados en distintas aplicaciones. Tal es el caso de la medicina en donde se utilizan modelos caóticos para predecir el comportamiento y desarrollo de los tumores. En la Escuela de Haken estudiaron el comportamiento caótico de los láseres [Madrid-Casada, 2010]. En ingeniería hay muchas aplicaciones, como las redes neuronales, donde se implementan modelos caóticos para procesamiento de datos [Méndez, 2018]. Actualmente existen varios osciladores caóticos de orden fraccional, por ejemplo, el oscilador caótico de Chen [Núñez-Pérez, 2021] y Yu-Wang [Bhalekar, 2013], ambos sistemas son de tres dimensiones y se representan con la derivada fraccional de Caputo. En [Hosny, 2022] se encriptan imágenes a color utilizando un sistema

hipercaótico de orden fraccional de Chen de 4 dimensiones, y se calcula la entropía para verificar el nivel de divergencia de las imágenes encriptadas.

## 2. Métodos

### Osciladores caóticos

La teoría del caos afirma que ningún sistema es realmente aleatorio; su aparente incertidumbre se debe a la falta de datos [Cisneros, 2010]. Un sistema dinámico será caótico si cumple dos condiciones: tener al menos tres variables dependientes y contener un término no lineal en sus ecuaciones. Los sistemas caóticos se caracterizan por su no linealidad, determinismo y alta sensibilidad a las condiciones iniciales, lo que significa que, aunque parezcan aleatorios, su comportamiento puede predecirse [Obeso, 2015]. Al graficar osciladores caóticos con respecto a la fase, estos tienden a evolucionar a ciertas zonas llamadas atractores o puntos de equilibrio. La estructura se rige por un mecanismo de estiramiento y doblamiento del conjunto de trayectorias, lo que genera sensibilidad en sus valores iniciales [Cortés-Avilez, 2018]. La Figura 1 muestra un oscilador caótico basado en funciones saturadas no lineales con distinto número de enrollamientos.



Fuente: elaboración propia

Figura 1 Oscilador caótico SNLF en el plano X-Y.

La sensibilidad ante cambios en las condiciones iniciales en los sistemas caóticos se caracteriza usando los LEs, estos miden la tasa promedio de divergencia o convergencia exponencial de trayectorias cercanas en el espacio de fase [Baker, 1996]. Para calcular el máximo LE en sistemas de una sola variable se utiliza la Ecuación 1.

$$\lambda(x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |f'(x_n)| \quad (1)$$

Donde  $\lambda$  es el LE,  $f'_n(x_n) = f'_n(x_n - 1) * f'_n(x_n - 2) * \dots * f'_n(x_n)$ ,  $x$  es la variable in-dependiente y  $f$  la variable dependiente. De manera que, si el máximo exponente es positivo se habla de un comportamiento divergente, es decir caótico [Lara, 2003]. En general, un sistema dinámico es  $k - dimensional$ , lo que complica el cálculo de los LEs. Para ello, se generaliza el valor de la derivada de la función al valor de la matriz jacobiana del sistema dinámico de dimensiones  $k$  expresado en Ecuación 2. En el sistema habrá tantos exponentes como dimensiones y será divergente cuando al menos uno de estos resulte positivo [Olmedo, 2007].

$$Df(x_1, x_2, \dots, x_k) = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \partial f_1 / \partial x_2 & \dots & \partial f_1 / \partial x_3 \\ \partial f_2 / \partial x_1 & \partial f_2 / \partial x_2 & \dots & \partial f_2 / \partial x_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_3 / \partial x_1 & \partial f_3 / \partial x_2 & \dots & \partial f_3 / \partial x_3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

### Calculo fraccional

Es una extensión del cálculo que analiza el uso de potencias reales del operador integral y derivativo, no limitando los operadores a un orden entero. El primer paso para resolver medias derivadas o integrales fraccionarias es obtener una fórmula general para resolver una integral de grado  $n$  que se muestra en la Ecuación 3.

$$D^n f(t) = \int_0^t \frac{f(y)(t-y)^{n-1}}{(n-1)!} dy \quad (3)$$

Donde  $n$  es un número entero positivo y  $t$  es el tiempo. El problema con la Ecuación 3 es que al orden de la operación integral se le aplica la función factorial y para poder utilizar dicha operación el orden siempre debe ser positivo y entero. Una solución de esto fue dada por Cauchy sustituyendo dicha función por la función Gamma ( $\Gamma$ ). La función  $\Gamma$  permite utilizar la notación factorial con números reales y complejos, siempre y cuando la parte real del número sea positiva [Torres-Hernández, 2017]. En la Ecuación 4 se observa la fórmula de Cauchy donde la notación factorial se sustituyó por la función Gamma,  $n$  fue sustituido por  $\alpha$  y representa un número real [Vinagre, 2016].

$$\mathcal{D}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(y)(t-y)^{\alpha-1} dy \quad (4)$$

### Derivada Fraccional de Riemann-Liouville

Gracias a los trabajos de Cauchy, se lograron calcular integrales de orden fraccional ( $FO$ ), pero quedaba pendiente cómo derivar en este mismo orden. Para resolver esto, se desarrolló el método de Riemann-Liouville para la derivación fraccional, el cual implica primero realizar una integración fraccional y luego aplicar una derivación de orden entero [Rodríguez, 2020]. Por ejemplo, para obtener una derivada de orden  $\frac{1}{2}$ , se comienza con una integración de orden  $\frac{1}{2}$ , y al resultado se le aplica una derivación de primer orden. La derivación fraccional de Riemann-Liouville se expresa en la Ecuación 5. Donde  $\alpha$  es el orden fraccional,  $n$  es el número entero mayor o igual a  $\alpha$  y  $a$  es el punto inferior del intervalo de integración.

$$\mathcal{D}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \quad -\infty < x < \infty \quad (5)$$

### Derivada fraccional de Caputo

La derivada de Riemann-Liouville plantea dificultades para modelar fenómenos físicos, ya que requiere condiciones iniciales de orden fraccionario, lo cual carece de interpretación física clara. En cambio, la derivada de Caputo invierte el proceso: primero aplica una derivada entera y luego realiza la integración fraccional, lo que permite usar condiciones iniciales de derivadas enteras, más fáciles de interpretar en contextos físicos [Rodríguez, 2020], Ecuación 6.

$$\mathcal{D}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \quad t > a \quad (6)$$

### Método de Adams-Bashforth-Moulton para ecuaciones de orden fraccional

Dada la naturaleza de los sistemas de ecuaciones de  $FO$ , no se pueden resolver de manera numérica de la misma forma que los sistemas de orden entero, por ello los métodos de Euler mejorada y Runge-Kutta de cuarto orden no suelen ser

utilizados. No obstante, hoy en día existen numerosas investigaciones relacionadas a dar solución a este tipo de ecuaciones. Un ejemplo es la investigación de R. Garrapa quien desarrolló códigos implementando métodos numéricos para resolver sistemas caóticos de FO, entre los cuales destaca el método basado en el predictor-corrector Adams-Bashforth-Moulton (ABM), por su alta precisión [Garrapa, 2018]. El método predictor-corrector ABM se muestra en las Ecuaciones 7 y 8. Donde  $x(t_{n+1})$  es el valor siguiente de  $x$ ,  $a$  y  $b$  son magnitudes derivadas del predictor-corrector ABM, dichos parámetros se extraen de las Ecuaciones 9 y 10.

$$x^p(t_{n+1}) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f(x(t_j)), \quad (7)$$

$$x(t_{n+1}) = x_0 + \frac{h^q}{\Gamma(q+2)} (f(x^p(t_{n+1}))) + \sum_{j=0}^n a_{j,n+1} f(x(t_j)), \quad (8)$$

$$a_{j,n+1} = \begin{cases} n^{q+1} - (n-q)(n+1)^q(n-j+2)^{q+1} + (n-j)^{q+1} & \text{si } j = 0 \\ -2(n-j+2)^{q+1} & \text{si } 1 \leq j \leq n, \\ 1 & \text{si } j = n+1 \end{cases} \quad (9)$$

$$b_{j,n+1} = \frac{h^q}{q} ((n+1-j)^q - (n-j)^q), \quad (10)$$

Donde  $q$  es el FO,  $h$  es el muestreo entre iteraciones. Para el modelo predictor-corrector ABM el error obtenido suele ser de aproximadamente  $h^2$ , por lo que, si se desea obtener un error máximo de  $10^{-6}$ , el valor máximo de  $h$  deberá ser mínimo de  $10^{-3}$  [Garrapa, 2018].

### Algoritmo de Benettin-Wolf para calcular los exponentes de Lyapunov

Un sistema caótico de FO se representa en la Ecuación 11.

$$D_*^q \Phi(t) = D_x f(x) D_*^q \Phi(t), \quad \Phi(t) = I, \quad (11)$$

Donde  $\phi$  es la matriz solución del sistema,  $D_x$  es la matriz jacobiana de  $f(x)$  e  $I$  es la matriz identidad. En la Ecuación 11 se observa una gran similitud a los sistemas de EDO, la diferencia es que el operador diferencial en este caso es de orden fraccional. El algoritmo de Benettin-Wolf es un método que calcula los exponentes

de Lyapunov de sistemas k-dimensionales, fue diseñado por Benettin en 1980 e implementado en lenguaje ensamblador por Wolf en 1985 [Chapra]. Es importante mencionar que en el algoritmo de Benettin-Wolf se utiliza el método de ortogonalización de Gram-Schmidt, con el objetivo de eliminar algunos problemas que surgen en los sistemas caóticos. El método de Gram-Schmidt es un proceso que genera una lista de vectores ortonormales  $[v_1', \dots, v_n']$  a partir de una lista arbitraria de vectores  $[v_1, \dots, v_n]$  [Wolf, 1985]. La lista de vectores ortogonales se basa en la generalización de la Ecuación 12. Donde  $\langle v_n, v_j' \rangle$  representa el producto punto entre los vectores  $v_n$  y  $v_j'$ .

$$v_n' = v_n - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\langle v_n, v_j' \rangle}{\langle v_j', v_j' \rangle} v_j' \quad (12)$$

### Osciladores caóticos de orden fraccional

En esta subsección se presentan los osciladores caóticos usados en esta investigación.

### Oscilador de Lorenz con orden fraccional

Es un sistema dinámico no lineal con valores iniciales tanto para un sistema de orden entero como para un sistema de FO [Lorenz, 1963]. El oscilador de Lorenz, en su versión de orden fraccional es modelado por el operador derivativo fraccional de Caputo tal y como se observa en el sistema de la Ecuación 13.

$$\begin{aligned} D_*^q x_1 &= \sigma(x_2 - x_1) \\ D_*^q x_2 &= -x_1 x_3 + p x_1 - x_2 \\ D_*^q x_3 &= x_1 x_2 - \beta x_3 \end{aligned} \quad (13)$$

Donde  $D^q$  representa el operador diferencial de Caputo de orden  $0 < q < 1$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  son las variables dependientes,  $\sigma$  y  $\beta$  son constantes y  $p$  es el parámetro de bifurcación. El sistema conserva los puntos de equilibrio con FO y orden entero, dichos puntos se pueden obtener a través de las Ecuaciones 14 a 16.

$$PE_{L1} = [0,0,0] \quad (14)$$

$$PE_{L2} = [\sqrt{\beta(p-1)}, \sqrt{\beta(p-1)}, p-1] \quad (15)$$

$$PE_{L3} = \left[ -\sqrt{\beta(p-1)}, -\sqrt{\beta(p-1)}, p-1 \right] \quad (16)$$

Siempre y cuando  $p$  sea mayor que 1, los puntos  $PE_{L2}$  y  $PE_{L3}$  existen. Mientras que la matriz jacobiana del sistema de Lorenz está dada por la Ecuación 17.

$$J_L = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ -x_3 + p & -1 & -x_1 \\ x_2 & x_1 & -\beta \end{pmatrix} \quad (17)$$

Para asegurar un comportamiento estable en el oscilador de Lorenz, es necesario que los parámetros  $\sigma$ ,  $\beta$  y  $p$  sean mayores a 0. En contraste, para que el sistema exhiba un comportamiento caótico estable, los valores de los parámetros deben ser específicos:  $\sigma = 10$ ,  $\beta = 8/3$ ,  $p \geq 28$  y el FO  $q \geq 0.985$  [Yu, 2009]. En la Figura 2a se muestra el oscilador de Lorenz con  $\sigma = 10$ ,  $\beta = 8/3$ ,  $p = 40$ ,  $q = 0.985$ .

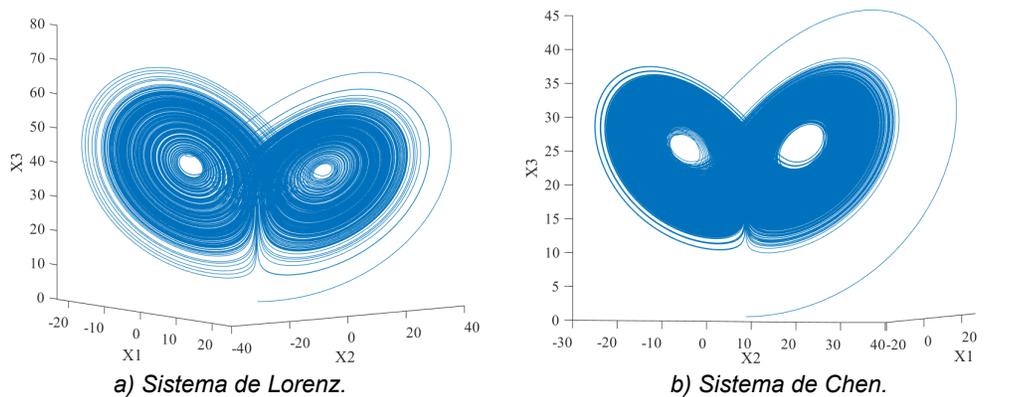


Figura 2 Osciladores caóticos de orden fraccional.

### Oscilador de Chen con orden fraccional

Es un sistema dinámico no lineal con valores iniciales tanto para un sistema de orden entero como para un sistema de FO [Núñez-Pérez, 2021]. El oscilador de Chen, en su versión de orden fraccional es modelado por el operador derivativo fraccional de Caputo, como lo muestra la Ecuación 18.

$$\begin{aligned} D_*^q x_1 &= a(x_2 - x_1) \\ D_*^q x_2 &= (c - a)x_1 - x_1x_3 + cx_2 \\ D_*^q x_3 &= x_1x_2 - bx_3 \end{aligned} \quad (18)$$

Donde  $D_*^q$  es el operador diferencial de Caputo de orden  $0 < q < 1$ ,  $x_1, x_2, x_3$  son las variables dependientes del sistema,  $a$  y  $b$  son los parámetros del sistema y  $c$  es el parámetro de bifurcación. Dicho sistema tiene los mismos puntos de equilibrio en su versión de  $FO$  y en su versión de orden entero, estos se calculan con las Ecuaciones 19 a 21.

$$PE_{c1} = [0,0,0] \quad (19)$$

$$PE_{c2} = [\sqrt{b(2c-a)}, \sqrt{b(2c-a)}, 2c-a] \quad (20)$$

$$PE_{c3} = [-\sqrt{b(2c-a)}, -\sqrt{b(2c-a)}, 2c-a] \quad (21)$$

Mientras que la matriz jacobiana del sistema de Chen está dada por la Ecuación 22.

$$J_c = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ (c-a) - x_3 & c & -x_1 \\ x_2 & x_1 & -b \end{pmatrix} \quad (22)$$

Para que el oscilador de Chen posea un comportamiento estable los parámetros,  $a$ ,  $b$  y  $c$  deben ser mayores a 0; y para que posean un comportamiento caótico estable se utilizan los parámetros.  $a = 34.0919$ ,  $b = 3.9072$ ,  $c = 30$  y  $0.7964 > q > 1$  [Núñez-Pérez, 2021]. En la Figura 2b se muestra el oscilador caótico de Chen con  $q = 0.8$ .

## Desarrollo de GUI

En este trabajo se diseñó una interfaz gráfica con 5 ventanas para ingresar los parámetros de los sistemas caóticos de orden fraccional, así como graficar el oscilador, los  $LEs$ , el diagrama de bifurcación y calcular los puntos de equilibrio.

## Ventana principal

La ventana principal mostrada en la Figura 3 funciona de tal forma que, con la listbox de la izquierda se selecciona el oscilador caótico a analizar, mientras que con la listbox de la derecha se selecciona si las ecuaciones tienen el mismo orden fraccional. Dependiendo de lo anterior, en el programa se mostrarán los valores de  $q_1, q_2, x_1, x_2$ , etc., dependiendo de las variables del sistema y si el orden fraccional es el mismo. Por otro lado, en las listbox de la esquina inferior izquierda se colocan

los parámetros de tiempo de inicio, tiempo final, parámetro de bifurcación y la  $h$  para resolver el sistema.



Fuente: elaboración propia

Figura 3 Ventana principal con parámetros para el sistema de Lorenz con  $q = 0.985$ .

### Cálculo de los exponentes de Lyapunov

En la interfaz se encuentra una textbox donde se ingresa el parámetro  $h$  para calcular los  $LEs$ . Una vez ingresado el parámetro  $h$ , se presiona el botón “calcular”. Posteriormente en un interruptor se elige si las ecuaciones poseen el mismo  $FO$ , entonces se calculan los  $LEs$ , de lo contrario se calculan los  $LEs$  para un sistema no uniforme en los  $FO$ . Por último, se grafican los  $LEs$ .

### Gráficas del oscilador caótico de orden fraccional

En la interfaz se observa una listbox en la esquina superior derecha que sirve para que el usuario elija el tipo de grafica que desea obtener y dependiendo del tipo de grafica se desplegarán los ejes 1, 2 o 3, si es un gráfico bidimensional o tridimensional.

Posteriormente, al presionar el botón “graficar” se llaman las variables globales, y entra al interruptor donde se selecciona si se poseen ecuaciones con el mismo  $FO$ , y se resuelve el sistema con el código de Garrapa. Por último, dependiendo el tipo de grafico seleccionado por el usuario, así como dependiendo los ejes que el usuario selecciona se mostrará dicho grafico en axes1.

### Gráficas de bifurcación de los exponentes de Lyapunov

En la interfaz se ingresa el parámetro de bifurcación inicial, parámetro de bifurcación final, el total de muestras entre los parámetros de bifurcación, y el

parámetro  $h$ . Al presionar el botón “Graficar bifurcación” el programa calcula los  $LEs$  del sistema para el parámetro de bifurcación inicial, una vez calculados, se almacena el ultimo  $LE$  y se cambia el parámetro de bifurcación para calcular nuevamente los  $LEs$ .

Dicho proceso se realiza hasta que el parámetro de bifurcación final. Por último, se grafican todos los  $LEs$ .

### **Cálculo de los puntos de equilibrio**

Cuando la GUI inicia, llama a las variables almacenadas globales, posteriormente entra en un interruptor para determinar cuál es el sistema y dependiendo del sistema, se calculan los puntos de equilibrio en base de las ecuaciones planteadas anteriormente. Por último, después de calcular todos los puntos de equilibrio, estos se muestran en la GUI en formato de lista; cuando el sistema posee 3 variables, las columnas de  $X_4$  y  $X_5$  se ocultan, si es de cuatro variables la columna  $X_5$  se oculta y si es de 5 variables se muestran todas las columnas.

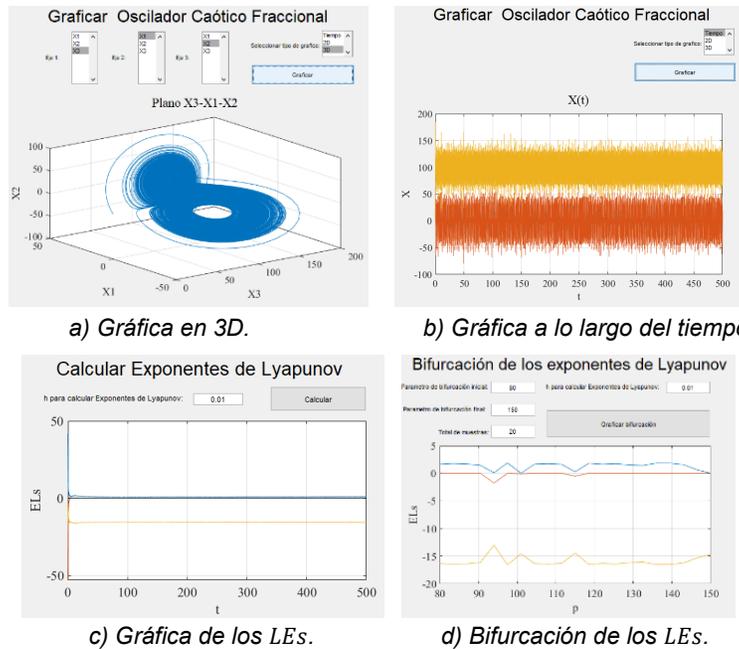
## **3. Resultados**

### **Sistema de Lorenz con $q = 0.985$**

Al simular el sistema de Lorenz con FO  $q = 0.985$  se utilizaron los parámetros:  $\sigma = 10$ ,  $\beta = 8/3$ ,  $p = 100$ ,  $x = [0.1, 0.1, 0.1]$ ,  $t_i = 0$ ,  $t_f = 500$ , y  $h = 0.005$ . Con el modelo predictor-corrector ABM el error es 0.0025%. La figura 4 muestra la gráfica en 3D, el comportamiento en el tiempo y los  $LEs$ . En la Figura 4d se observa la bifurcación de los  $LEs$ , y se aprecia como existe un  $LE$  que se mantiene positivo para los valores de  $p$  entre 80 y 146. Por tanto, el oscilador de Lorenz con los parámetros anteriores posee un comportamiento caótico con  $80 \leq p \leq 146$ .

### **Sistema de Lorenz con $q = [0.985 \ 0.990 \ 0.995]$**

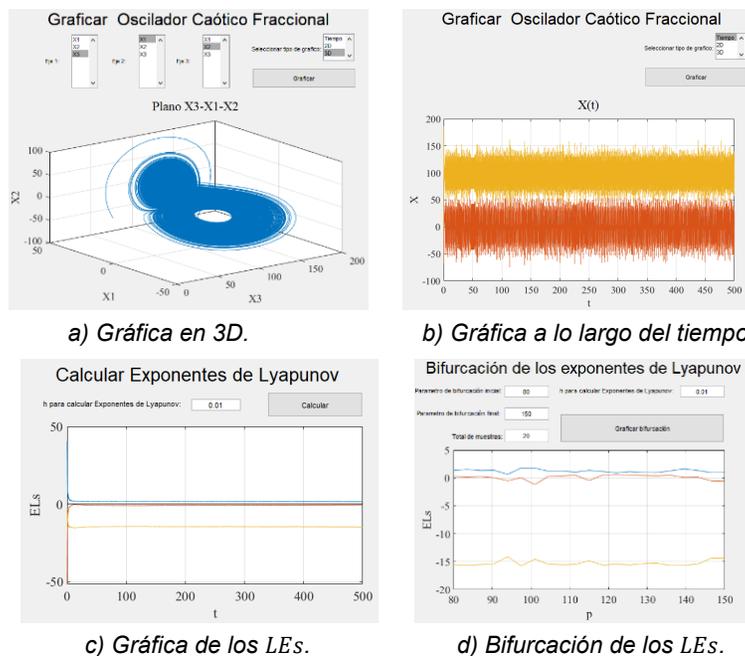
Al simular el sistema de Lorenz con FO  $q = [0.985 \ 0.990 \ 0.995]$  se utilizaron los parámetros:  $\sigma = 10$ ,  $\beta = 8/3$ ,  $p = 100$ ,  $x = [0.1, 0.1, 0.1]$ ,  $t_i = 0$ ,  $t_f = 500$ , y  $h = 0.005$ .



Fuente: elaboración propia

Figura 4 Sistema de Lorenz con  $q = 0.985$ .

En las figuras 5a y 5b se observan las gráficas en 3D y el comportamiento del sistema en el tiempo.



Fuente: elaboración propia

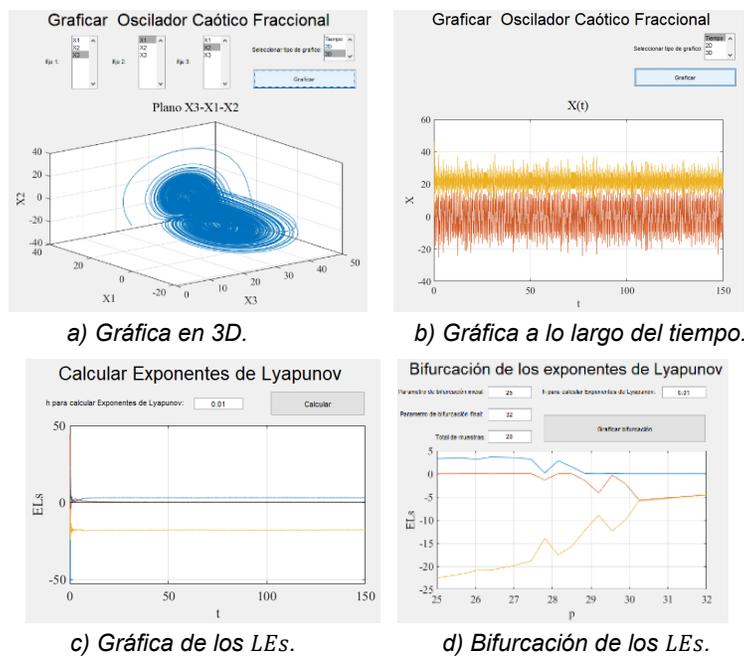
Figura 5 Sistema de Lorenz con  $q = [0.985 \ 0.990 \ 0.995]$ .

Al graficar los *LEs* se asignó un tiempo de muestreo de 0.01, en la Figura 5c se observan las gráficas de los *LEs*. En el diagrama de bifurcación de la Figura 5d se aprecia como existe un EL que se mantiene siempre positivo para los valores de  $p$  entre 80 y 150, de manera que, el oscilador de Lorenz con los parámetros anteriores posee un comportamiento caótico para  $80 \leq p \leq 150$ .

### Sistema de Chen con $q = 0.92$

Al simular el sistema de Chen con  $FO$   $q = 0.92$  se utilizaron los parámetros:  $a = 35$  y  $b = 3$ ,  $c = 28$ ,  $x = [0.1, 0.1, 0.1]$ ,  $t_i = 0$ ,  $t_f = 150$ , y  $h = 0.005$ . Al graficar los *LEs* se asignó un tiempo de muestreo de 0.005. En la Figura 6 se observan las gráficas en 3D, el comportamiento del sistema a lo largo del tiempo y de los *LEs*.

Por otro lado, la Figura 6d muestra la gráfica de bifurcación de los *LEs* con valores para el parámetro de bifurcación de entre 80 y 150. En el diagrama de bifurcación (Figura 6d) se aprecia como existe un *LE* que se mantiene positivo para los valores de  $p$  entre 25 y 28.8, de manera que, el oscilador de Chen con los parámetros anteriormente establecidos posee un comportamiento caótico para  $25 \leq p \leq 28.8$ .

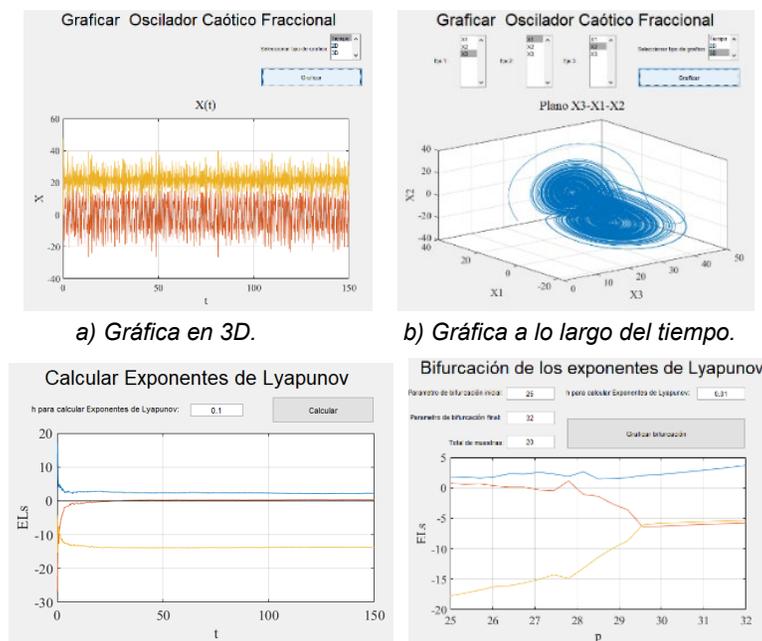


Fuente: elaboración propia

Figura 6 Sistema de Chen con  $q = 0.92$ .

### Sistema de Chen con $q = [0.92 \ 0.94 \ 0.96]$

Al simular el sistema de Lorenz con FO  $q = [0.92 \ 0.94 \ 0.96]$  se usaron los parámetros:  $a = 35$  y  $b = 3$ ,  $c = 28$ ,  $x = [0.1, 0.1, 0.1]$ ,  $t_i = 0$ ,  $t_f = 150$ , y  $h = 0.005$ . En las figuras 7a, 7b y 7c se observan las gráficas en 3D, el comportamiento en el tiempo y la gráfica de los  $LEs$ . Al graficar los  $LEs$  se asignó un tiempo de muestreo de 0.01, en la Figura 7c se observan las gráficas de los  $LEs$  y la bifurcación de los  $LEs$ .



Fuente: elaboración propia

Figura 7 Sistema de Chen con  $q = [0.92 \ 0.94 \ 0.96]$ .

La Figura 7d muestra el diagrama de bifurcación de un  $LE$  que se mantiene positivo para los valores de  $p$  entre 25 y 32, de manera que, el oscilador de Chen con los parámetros anteriores posee un comportamiento caótico para  $25 \leq p \leq 32$ .

## 4. Discusiones

Los resultados obtenidos a través de la interfaz gráfica de usuario demuestran la capacidad del método de ABM y el algoritmo de Benettin-Wolf para resolver el sistema y obtener sus  $LEs$  de manera muy precisa. Al realizar las simulaciones se

comprobó que los sistemas de Lorenz y Chen poseen comportamiento caótico para ciertos parámetros en su sistema, tal y como se ha reportado en distintas investigaciones. Por otro lado, al comparar los diagramas de bifurcación de las figuras 4d y 5d se observa que cuando todas las ecuaciones poseen el mismo orden fraccional ( $q = 0.985$ ), el sistema es caótico en un 5% menos de los valores del parámetro  $p$ , esto en comparación del mismo sistema con distinto orden fraccional. Esto mismo ocurre con el sistema de Chen, donde, al comparar la bifurcación de las figuras 6d y 7d se observa que, con el mismo orden fraccional para todas las ecuaciones ( $q = 0.92$ ), el sistema es caótico en un rango menor de valores, en concreto un 46% menor que con distinto orden fraccional. De manera que se puede concluir que el orden fraccional influye en el comportamiento caótico de un sistema.

## 5. Conclusiones

En esta investigación se realizó el diseño de una interfaz gráfica de usuario en Matlab para resolver sistemas caóticos de orden fraccional analizando dos casos, con el mismo o distinto orden. Además, se calculan los  $LEs$ , los diagramas de bifurcación y los puntos de equilibrio del sistema. Para diseñar la interfaz gráfica se utilizó la herramienta Guide de Matlab. La interfaz diseñada cuenta con un menú principal y cuatro submenús, los cuales corresponden a cada una de las tareas que realiza la interfaz. La ventaja de utilizar el método de ABM para resolver los sistemas caóticos de  $FO$  es que presenta un bajo error en los datos de  $h^2$ , de manera que, cuando  $h = 0.01$  el error en los resultados es de 0.01%. Al analizar las gráficas que muestran los  $LEs$  de cada sistema, se observa que se cumple la característica de un sistema sea caótico, por lo menos uno de sus  $LEs$  debe poseer un valor positivo, tal y como se muestra en todas las gráficas de  $LEs$ . De igual forma, al comparar las gráficas que muestran los  $LEs$  de cada sistema en su versión con el mismo y distinto orden, se observa que, aunque el cambio en el orden sea mínimo, este influye en gran medida para que el sistema posea o no un comportamiento caótico ante distintos cambios en el parámetro de bifurcación. Por último, el sistema cuenta con 18 millones de iteraciones para calcular los  $LEs$ , por tanto, el cálculo de los  $LEs$  tarda aproximadamente 1 segundo por cada 1.24 millones de iteraciones.

## 6. Bibliografía y Referencias

- [1] Almeida, R.: A Caputo fractional derivative of a function with respect to another function. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 44, 460–481, 2010. doi: 10.1016/i.cnsns.2016/09.006.
- [2] Bahar, A., Erdal, B., Thabet, A.: Non-local fractional calculus from different viewpoint generated by truncated M-derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 366, 2020. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.112410>.
- [3] Baker, G. L., Gollub, J. P.: *Chaotic dynamics: an introduction*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996. doi: [doi.org/10.1017/CBO9781139170864.002](https://doi.org/10.1017/CBO9781139170864.002).
- [4] Bhalekar, S.: Dynamics analysis of fractional order Yu-Wang system. *Open Physics* 11(10), 1, 2013. doi:10.2478/s11534-013-0307-0.
- [5] Cang, S., Wu, A., Wang, Z., Chen, Z.: Four-dimensional autonomous dynamical system with conservative flows: two-case study. *Nonlinear Dynamics* 89(4), 2495–2508, 2017.
- [6] Chapra, S., Canale, R.: *Métodos numéricos para ingeniería*. 5ta edición, McGraw-Hill Interamericana, Ciudad de México, México, 2007.
- [7] Cisneros, R., Escamilla, N., Plascencia, D.: *Sistemas caóticos aplicados en telecomunicaciones*. Proyecto de titulación de ingeniería, DICE, IPN, CDMX, México, 2010.
- [8] Cortés-Avilez, J., Bonilla-Rodríguez, A., Serrato-Andrade, R., Entrambasaguas-León, G., Calvillo-Téllez, A., Núñez-Pérez, J. C.: Diseño de Sistemas Caóticos de Multi-enrollamiento y Multi-direcciones usando SNLF. *Revista Aristas* 1(12), 156–162, 2018.
- [9] Dubeibe, F.: Calculo del máximo exponente de Lyapunov con Mathematica. *Revista Colombiana de Física* 45(1), 151–155, 2013.
- [10] García-Meza, C. J.: *La Teoría de Caos: Algunas Implementaciones en el Área de la Metodología en la Ciencia*. Tesis de maestría, Facultad de Filosofía y letras, UANL, Monterrey, Nuevo León, 1993.
- [11] Garrapa, R.: Numerical Solution of Fractional Differential Equations: A Survey and a Software Tutorial. *Mathematics* 6(2), 2018. doi: 10.3390/math6020016.

- [12] Hosny, K. M., Kamal, S. T., Darwish, M. M.: Novel encrypted for color images using fractional-order hyperchaotic system. *J Ambient Intell Human Comput* 13(1), 973–988, 2022.
- [13] Junfeng, L., Li, M.: Numerical analysis of a fractional nonlinear oscillator with coordinate-dependent mass. *Results in Physics* 43, 2022. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2022.106108>.
- [14] Lara, L., Stoico, C., Machado, R., Castagnino, M.: Estimación de los Exponentes de Lyapunov. *Mecánica Computacional* 22(16), 2003.
- [15] Lorenz, E. N.: Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the Atmospheric Sciences* 20(2), 130–141, 1963. doi:10.1175/1520-0469(1963)020<0130:dnf>2.0.co;2.
- [16] Madrid-Casado, C. M.: Historia de la Teoría del Caos Contado para Escépticos. *Encuentros multidisciplinares* 1(34), 1–15, 2010.
- [17] Méndez, R.: Implementación de osciladores caóticos en sistemas embebidos y aplicaciones. Tesis de doctorado, DEyT, CICESE, B. C., México, 2018.
- [18] Núñez-Pérez, J. C., Adeyemi, V. A., Sandoval-Ibarra, Y., Pérez-Pinal, F. J., Tlelo-Cuautle, E.: Maximizing the Chaotic Behavior of Fractional Order Chen System by Evolutionary Algorithms. *Mathematics* 9(11), 1194, 2021. doi:10.3390/math9111194.
- [19] Obeso, P.: Diseño e implementación en un FPGA de oscilador caótico para aplicaciones en Sistemas de seguridad. Tesis de Maestría en Ciencias en Sistemas Digitales, IPN-CITEDI, Baja California, México, 2015.
- [20] Olmedo, E., Gimeno, R., Escot, L., Mateos, R.: Convergencia y Estabilidad de los Tipos de Cambio Europeos: Una Aplicación de Exponentes de Lyapunov. *Cuadernos de Economía* 44(129), 91–108, 2007. doi:10.4067/s0717-68212007000100004Ga.
- [21] Rodríguez, M.: Introducción al cálculo fraccionario y a los modelos de crecimiento tumoral clásico y fraccionarios. Tesis de Doctorado, DE, INAOE, Puebla, México, 2020.
- [22] Torres-Hernández, A., Brambila-Paz, T.: Introducción al Cálculo Fraccional. Facultad de Ciencias, UNAM, 2017.

- [23] Vinagre, M., Feliu-Batle, V., Tejado, I.: Control fraccionario: fundamentos y guía de uso. *Revista Iberoamericana de Automática e Información Industrial* 13(3), 265-280, 2016.
- [24] Wolf, A., Swinney, J. B., Vastano, J.A.: Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 16(3), 285–317, 1985.
- [25] Yu, Y., Li, H., Wang, S., Yu, J.: Dynamic analysis of a fractional-order Lorenz chaotic system. *Chaos Solitons & Fractals* 42(2), 1181–1189, 2009. doi:10.1016/j.chaos.2009.03.016.