

HOJA DINÁMICA EN GEOGEBRA PARA EL CÁLCULO EXACTO DEL VOLUMEN CONTENIDO EN UN TANQUE CILINDRICO VERTICAL INCLINADO

GEOGEBRA'S DYNAMIC SHEET TO CALCULATE THE EXACT VOLUME IN A TILTED VERTICAL CILYNDRICAL RECIPIENT

Michelle Guadalupe Salas Flores

Tecnológico Nacional de México / IT de Celaya
22030350@itcelaya.edu.mx

Gloria Reyna Gómez Páez

Tecnológico Nacional de México / IT de Celaya
reyna.gomez@itcelaya.edu.mx

Miguel Adrián Reyes Mendoza

Tecnológico Nacional de México / IT de Celaya
miguel.reyes@itcelaya.edu.mx

Ma. Guadalupe Medina Torres

Tecnológico Nacional de México / IT de Celaya
guadalupe.medina@itcelaya.edu.mx

David Gasca Figueroa

Tecnológico Nacional de México / IT de Celaya
david.gasca@itcelaya.edu.mx

Recepción: 31/octubre/2023

Aceptación: 26/diciembre/2023

Resumen

En el presente trabajo se desarrolla una hoja dinámica en el software GeoGebra para el cálculo exacto del volumen contenido en un tanque cilíndrico vertical inclinado en función de sus parámetros geométricos y del nivel de llenado. El trabajo se desarrolla con fines educativos mostrando de manera integradora la aplicación de los cálculos integral y vectorial en la solución de un problema para el cual solo se han reportado aproximaciones. Se analizan las tres regiones de interés: nivel de llenado comprende el punto más bajo del tanque y el nivel en el cual la tapa plana inferior está completamente humedecida; nivel de llenado comprende desde el punto donde la tapa plana inferior está completamente humedecida hasta la altura límite para la cual la tapa plana superior comenzara a mojarse, y nivel donde la tapa

plana superior inicia a humedecerse hasta el llenado completo del recipiente. Para cada región es desarrollada la ecuación matemática que proporciona el volumen en función del nivel de llenado y la correspondiente ecuación para el nivel máximo en cada región. Finalmente, se muestra la construcción de la hoja dinámica donde son implementadas las ecuaciones matemáticas y se proporciona el cálculo exacto del volumen y una visualización del nivel de llenado, así como del comportamiento del volumen en función del nivel de llenado.

Palabras Clave: GeoGebra, Hoja dinámica, Nivel de llenado, Recipiente cilíndrico vertical inclinado, volumen exacto.

Abstract

In the present work a dynamic sheet built in GeoGebra to calculate the exact volume contained inside a tilted vertical cylindrical recipient as a function of the geometric parameters and the fill level. The work is developed for educational purposes, showing in an integrative manner the application of integral and vectorial calculus in the solution of a problem for which only approximations have been reported. There are three regions of interest are analyzed: the filled level includes the lowest point of the tank and the level where the lower flat surface is completely wet; The fill level is limited by the level where the lower flat surface is completely wet and the level where the upper flat surface is starting to be wet, and the fill level starts where the upper flat surface is starting to be wet and the level where the recipient is totally full. For each region a math equation is determined to calculate the volume as a function of the fill level and the equation to calculate the maximum volume as well. Finally, a built dynamic sheet where the implemented math equations and the graph volume vs fill level are shown.

Keywords: *Dynamic sheet, Exact volume, Fill level, GeoGebra, Tilted vertical cylindrical recipient.*

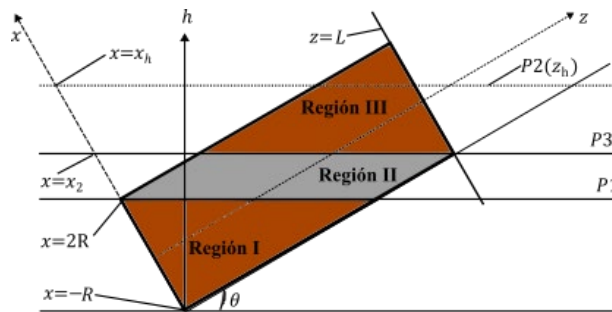
1. Introducción

Los recipientes cilíndricos verticales son ampliamente utilizados por la industria química, alimentaria y de hidrocarburos para el almacenamiento principalmente de

sustancias en estado líquido [NORMA Oficial Mexicana NOM-002-SCT/2011, 2011]. Calcular el volumen parcial (solo se llena hasta determinado nivel) contenido dentro de estos recipientes cuando están completamente apoyados en su superficie plana sobre una superficie horizontal [Zill, 2015] resulta sumamente sencillo, en cambio, el cálculo de este volumen parcial es un tanto más complejo cuando se apoyan sobre una plano horizontal a través de su superficie [Nievergelt, 1994]. Sin embargo, en la práctica los casos más realistas, ocurren cuando el recipiente presenta cierta inclinación debido a irregularidades en la superficie de apoyo, también. La estimación del volumen parcial dentro de un recipiente cilíndrico horizontal como una función de la altura de llenado se han desarrollado ampliamente [Khaisongkram & Banjerdpongchai, 2004; Mora Casal & Mora Casal, 2019; Xie et al., 2012] e incluso la norma 12917 [International Standardization Organization, 2002] cuya última revisión fue efectuada en 2017. Sin embargo, para el caso de tanques cilíndricos verticales no ha sido determinado el volumen de llenado en función de la altura cuando su apoyo plano presenta una inclinación respecto a la horizontal. En el presente trabajo se ilustra el método para el cálculo del volumen parcial exacto contenido dentro de un recipiente cilíndrico vertical con una inclinación dada por el ángulo entre la horizontal y la superficie plana del cilindro, se abordan tres situaciones en el análisis; i) el nivel de llenado está comprendido entre el punto más bajo del contenedor y cuando la tapa plana inferior está completamente humedecida, ii) el nivel de llenado está delimitado por dos planos horizontales desde donde el nivel de llenado humedece la superficie plana inferior y el nivel donde está a punto de iniciar el mojado de la superficie plana superior iii) el nivel de llenado está comprendido desde el nivel donde inicia el mojado de la superficie plana superior hasta el llenado completo del tanque. Se obtienen ecuaciones matemáticas en función de la altura de llenado para los tres casos expuestos. Además, estas ecuaciones son aplicadas a un caso propuesto para observar la relación entre el volumen y la altura de llenado en las regiones de interés. Finalmente, se ilustra el empleo de GeoGebra en el desarrollo de una hoja dinámica que se ejecuta en Java mediante el navegador para conocer de manera dinámica el volumen del llenado en función del radio, altura del recipiente, inclinación y altura de llenado.

2. Métodos

El volumen parcial de llenado dentro de un recipiente cilíndrico vertical de longitud, L , radio, R , e inclinación, θ , está delimitado por el plano horizontal z_h posicionado a la altura de llenado h . La inclinación está dada por el ángulo entre la horizontal y el eje de simetría del cilindro. Para calcular este volumen parcial es conveniente fijar un marco de referencia rotado un ángulo θ , con centro en una de las tapas planas y eje de simetría paralelo a uno de los ejes coordenados. La inclinación del recipiente es tal que la inclinación cumple la relación $\theta \geq \tan^{-1}(2R/L)$. En la figura 1 el eje “ z ” coincide con el eje de simetría, el eje “ x ” esta sobre el plano y el eje “ y ” es perpendicular al plano “ xz ”. Los planos paralelos $P1$ y $P3$ son horizontales y separan las regiones de interés. Además, los planos son representativos del nivel de llenado proyectado en el plano que contiene a la tapa plana inferior reflejado en las posiciones $x_1 = R$ y $x_2 = L \tan \theta$, respectivamente. Para x_1 , el nivel de llenado es $h = 2R \cos \theta$ que es el nivel para el cual toda la tapa inferior esta mojada completamente, en tanto que para x_2 , el nivel de llenado esta dado por $h = L \sin \theta$ que es el límite cuando la tapa superior comienza a mojarse, como se ilustra en la figura 1. El plano $P2$ es representativo de manera general del plano que contiene a la superficie de llenado a un nivel o altura h .



Fuente: elaboración propia

Figura 1 Representación del volumen de llenado de un recipiente cilíndrico de radio R y longitud L para una inclinación θ a determinada altura h .

Ecuación del plano que define la altura de llenado

El volumen contenido en el recipiente cilíndrico vertical está comprendido por $P2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = R^2$ denominado c . En la figura 1, el punto inferior de la tapa

plana superior tiene las coordenadas (x, y, z) dadas por $(-R, 0, L)$ es empleado para generalizar la ecuación de $P2$, este punto está contenido en el plano $P3$ y también es un punto de una recta de intersección entre los planos $P3$ y xz , la inclinación, m , de la recta está dada por $m = -\tan \theta$, y la ecuación 1 representa la ecuación de la recta.

$$x + z \tan \theta + R - L \tan \theta = 0 \quad (1)$$

La ecuación 1 como una función de dos variables es $f(x, z) = x + z \tan \theta + R - L \tan \theta$, y es empleada para obtener un vector normal \vec{n} contenido en el plano xz mediante el gradiente $\vec{\nabla}f(x, z)$, la ecuación 2 representa el vector normal es perpendicular tanto a la recta (ecuación1) como al plano $P3$.

$$\vec{n} = \vec{\nabla}f(x, z) = 1\hat{i} + \tan(\theta)\hat{k} \quad (2)$$

Las componentes en \mathcal{R}^3 del vector normal a $P3$ son $\vec{n}(x, y, z) = 1\hat{i} + 0\hat{j} + \tan(\theta)\hat{k}$, también es normal al plano $P2$ y un punto en el plano $P2$ esta dado por $(x, y, z) = (-R + h \sec \theta, 0, 0)$, así la ecuación del plano que define la altura de llenado del recipiente cilíndrico vertical, z_h , se muestra en la ecuación 3 y se obtiene del producto punto entre el vector $\vec{n}(x, y, z)$ y un vector en el plano $P2$ dado por $\langle x + R - h \sec \theta, y - 0, z - 0 \rangle$.

$$z_h = -(x + R) \cot \theta + h \csc \theta \quad (3)$$

Ecuaciones matemáticas para determinar el volumen en las regiones de análisis

De la figura 1, se observa que se distinguen tres regiones de estudio:

- Región I: Desde el punto más bajo del tanque, hasta donde el nivel de líquido moja completamente la tapa plana inferior, limitada por el plano $P1$. La altura varia en el intervalo $0 \leq h < 2R \cos \theta$. El volumen contenido dentro del tanque está comprendido entre los planos z_h y $z = 0$ delimitados por el cilindro c en dirección de "y" y en dirección de "x" los limites varían de $x = -R$ hasta $x = x_h$, el volumen esta dado por la ecuación 4;

$$V_1 = 2 \int_{-R}^{x_h} \int_0^{y_1} [h \csc \theta - (x + R) \cot \theta] dy dx \quad (4)$$

Donde $x_h = -R + h \sec \theta$ es la altura mojada proyectada sobre el plano que contiene a la tapa plana inferior del recipiente y $y_1 = \sqrt{R^2 - x^2}$, para esta región se tiene un volumen máximo cuando $h = 2R \cos \theta$.

- Región II: Iniciando en el nivel la tapa plana inferior está completamente mojada (plano $P1$), hasta el nivel donde el mojado de la tapa plana superior está por iniciar (plano $P3$). La altura de llenado en esta región varía en el intervalo $2R \cos \theta \leq h < L \sin \theta$. Para el cálculo del volumen en esta región, el volumen está comprendido por el plano z_h , el plano $z = 0$ y el cilindro c en el intervalo $[-R, R]$ la ecuación 5 representa este volumen,

$$V_2 = 2 \int_{-R}^{+R} \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} [h \csc \theta - (x + R) \cot \theta] dy dx \quad (5)$$

- Región III: Iniciando en el punto inferior de la tapa plana superior hasta el llenado completo del recipiente cilíndrico. La altura de llenado varía en el intervalo dado por $L \sin \theta \leq h \leq 2R \cos \theta + L \sin \theta$. El volumen en la última zona se determina con una ecuación recursiva, donde la suma $V_{2_{\max}} + V_{1_{\max}}$ representa el volumen total y se sustrae el cálculo del volumen de la tercera región, el cual varía desde un valor igual a $V_{1_{\max}}$ en magnitud hasta un valor de 0 conforme h crece. De esta manera, el volumen a sustraer es el volumen comprendido por el plano $z = L$ y el plano z_h , delimitado por el cilindro c en dirección de “y” y en dirección de “x” el límite inferior tiene un desplazamiento $L \tan \theta$ unidades que debe sustraerse. Así, el intervalo de trabajo es desde el límite inferior donde $x = -R + h \sec \theta - L \tan \theta$, hasta $x = R$, de este análisis resulta la ecuación 6,

$$V_3 = V_{2_{\max}} + V_{1_{\max}} - 2 \int_{-R+h \sec \theta - L \tan \theta}^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} [L - h \csc \theta + (x + R) \cot \theta] dy dx \quad (6)$$

En la región 3 el volumen máximo se obtiene cuando $h = 2R \cos \theta + L \sin \theta$.

Hoja dinámica en GeoGebra para determinar de manera dinámica el volumen del recipiente cilíndrico vertical en función de la altura de llenado

Se emplean las ventajas del software de matemáticas dinámicas GeoGebra para programar el resultado de las ecuaciones 4-6 a manera de que al recibir como datos

de entrada (en casillas de entrada) el radio, la longitud e inclinación del recipiente cilíndrico vertical se obtenga una visualización de la altura de llenado y un cálculo exacto del volumen contenido dentro del tanque. Finalmente, por cuestiones prácticas esta programación se exporta en forma de hoja dinámica para facilitar su uso.

3. Resultados

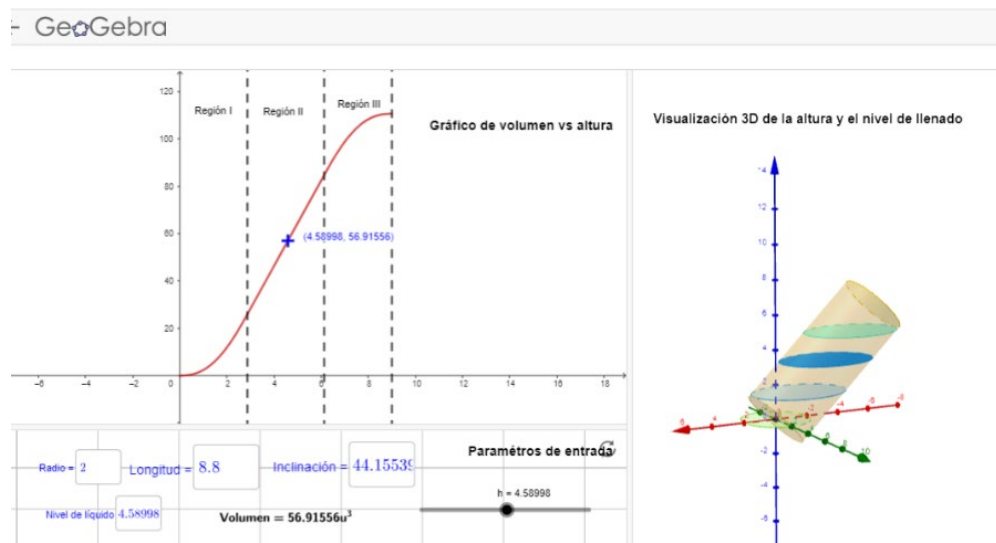
De la tabla 1, el volumen exacto en las regiones I, II y III se determina a partir de las ecuaciones 7, 9 y 11, respectivamente. En tanto que las ecuaciones 8, 10 y 12 definen el valor del volumen máximo en las regiones mencionadas de manera respectiva. Las ecuaciones resultantes están en función de los parámetros de entrada dados por: el parámetro variable h correspondiente a la altura de llenado y los parámetros conocidos como R (radio del cilindro), L (longitud del cilindro) y la inclinación del recipiente cilíndrico (θ), estas ecuaciones son válidas siempre y cuando la inclinación del recipiente cilíndrico sea mayor o igual a $\tan^{-1}(2R/L)$.

Tabla 1 Volumen en función del radio, longitud e inclinación en función del nivel de fluido para las tres regiones de interés.

Región	Volumen
I	$V_1 = \left[\frac{R_1}{R} R_2^{\frac{1}{2}} + \sin^{-1}(R_1) + \frac{\pi}{2} \right] k_1 + \frac{2}{3} R_2^{\frac{3}{2}} \cot \theta$ (7)
	$V_{1_{max}} = \pi R^3 \cot \theta$ (8)
	$0 \leq h < 2R \cos \theta$
II	$V_2 = \pi R^2 (h \csc \theta - R \cot \theta)$ (9)
	$V_{2_{max}} = \pi R^2 (L - R \cot \theta)$ (10)
	$2R \cos \theta \leq h < L \sin \theta$
III	$V_3 = \frac{\pi}{2} R^2 L + \frac{\pi}{2} R^2 h \csc \theta - \frac{\pi}{2} R^3 \cot \theta + \frac{2}{3} \cot \theta R_4^{\frac{3}{2}} + \left[\frac{R_3}{R} R_4^{\frac{1}{2}} + \sin^{-1} R_3 \right] k_2$ (11)
	$V_{3_{max}} = \pi L R^2$ (12)
	$L \sin \theta \leq h \leq 2R \cos \theta + L \sin \theta$
$R_1 = (-R + h \sec \theta)/R$, $R_2 = h \sec \theta (2R - h \sec \theta)$, $R_3 = (-R + h \sec \theta - L \tan \theta)/R$, $R_4 = (h \sec \theta - L \tan \theta)(2R - h \sec \theta + L \tan \theta)$, $k_1 = (h \csc \theta - R \cot \theta)R^2$, $k_2 = (L - h \csc \theta + R \cot \theta)R^2$ y $\theta \geq \tan^{-1}(2R/L)$	

Fuente: elaboración propia

En la figura 2 se observa una hoja dinámica construida en GeoGebra donde a partir de los datos de entrada (Radio, Longitud, inclinación y nivel de llenado) se visualiza una representación del recipiente, el comportamiento del volumen contra la altura de llenado, una representación de esta altura y el valor del volumen para este nivel de líquido. En la parte superior izquierda de la figura 1 se resaltan los límites entre las regiones I-II y II-III que son representadas de manera gráfica por los círculos azul tenue en el recipiente del lado derecho.



Fuente: elaboración propia

Figura 2 Volumen de un tanque cilíndrico vertical inclinado en función del nivel de llenado.

4. Discusión

El volumen de las regiones I y III son iguales para toda inclinación, en el límite cuando la inclinación es $\theta = \tan^{-1}(2R/L)$ el volumen de la región 2 es igual a cero, para valores mayores de inclinación se tiene un recipiente cilíndrico vertical inclinado como lo es el presente trabajo, en tanto que para inclinaciones menores se considera el recipiente como un recipiente cilíndrico horizontal inclinado. La variación del volumen en la región II es lineal, en la región I no lineal creciente y cóncava hacia arriba, en tanto que en la región III es no lineal creciente, cóncava hacia abajo. Finalmente, la hoja dinámica mostrada en la figura 2 ilustra de manera gráfica y práctica los resultados de las ecuaciones 4-6, la versatilidad de GeoGebra permite realizar el análisis independientemente de las dimensiones del recipiente.

5. Conclusiones

Se obtuvieron fórmulas matemáticas para el cálculo exacto del volumen dentro de recipientes cilíndricos verticales inclinados, se define el ángulo para el cual un recipiente cilíndrico puede ser considerado que está colocado de manera vertical con inclinación u horizontal con inclinación. Se desarrolla una hoja dinámica en el Software GeoGebra para determinar el volumen del recipiente cilíndrico vertical inclinado en función del nivel de llenado dadas las dimensiones del recipiente.

6. Bibliografía y Referencias

- [1] International Standardization Organization. (2002). ISO 12917 Petroleum and liquid petroleum products—Calibration of horizontal cylindrical tanks—Part 1: Manual methods.
- [2] Khaisongkram, W., & Banjerdpongchai, D. (2004). A combined geometric-volumetric calibration of inclined cylindrical underground storage tanks using the regularized least-squares method. *Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Control Applications*, 2004., 2, 1515-1520. <https://doi.org/10.1109/CCA.2004.1387590>
- [3] Mora Casal, R. A., & Mora Casal, J. R. (2019). Implementación de tablas de corrección al volumen del tanque cilíndrico horizontal inclinado, compatibles con la norma ISO 12917:2017. *Revista Ingeniería*, 29(2). <https://doi.org/10.15517/ri.v29i2.36211>
- [4] Nievergelt, Y. (1994). Calculus Measures Tank Capacity and Avoids Oil Spills. *The College Mathematics Journal*, 25(2), 132-136. <https://doi.org/10.1080/07468342.1994.11973596>
- [5] NORMA Oficial Mexicana NOM-002-SCT/2011. (2011). Listado de las sustancias y materiales peligrosos más usualmente transportados.
- [6] Xie, W., Wang, X., Cui, H., & Chen, J. (2012). Optimization Model of Oil-Volume Marking with Tilted Oil Tank. *Open Journal of Optimization*, 01(02), 20-24. <https://doi.org/10.4236/ojop.2012.12004>.
- [7] Zill, D. G. (2015). *Matemáticas 3: Cálculo de varias variables* (2a ed). McGraw Hill/Interamericana.