

ECUACIONES CONSTITUTIVAS DE SÓLIDOS CELULARES AUXÉTICOS

CONSTITUTIVE EQUATIONS OF AUXETIC CELULAR SOLIDS

Ramón Rodríguez Castro

Tecnológico Nacional de México / IT de Celaya, México
ramon.rodriguez@itcelaya.edu.mx

Jaime Gallardo Alvarado

Tecnológico Nacional de México / IT de Celaya, México
jaime.gallardo@itcelaya.edu.mx

Luis Alejandro Alcaráz Caracheo

Tecnológico Nacional de México / IT de Celaya, México
alejandro.alcaraz@itcelaya.edu.mx

Víctor Antonio Pantoja Cuarenta

Tecnológico Nacional de México / IT de Celaya, México
victor.pantoja@itcelaya.edu.mx

Roberto Edú Arriaga Medina

Tecnológico Nacional de México / IT de Celaya, México
roberto.arriaga@itcelaya.edu.mx

Recepción: 19/febrero/2023

Aceptación: 20/junio/2023

Resumen

Materiales reticulares (látice) son un tipo de materiales celulares caracterizados por una micro-estructura periódica regular que se extiende a grandes distancias en todas direcciones y puede idealizarse como una amplia red de vigas o barras delgadas. Una clase especial de materiales celulares con potencial de aplicación tecnológica son las estructuras celulares auxéticas, las cuales ostentan un coeficiente de Poisson negativo. Un gran número de métodos analíticos se han propuesto para estudiar el comportamiento mecánico de materiales celulares auxéticos. Investigación experimental también se ha realizado, pero está limitado por cuestiones de manufactura. En las últimas décadas se han usado análisis de elementos finitos para predecir comportamiento auxético y otras propiedades mecánicas, sin embargo, simulaciones con modelos completos de elemento finito

(con miles de grados de libertad) son con frecuencia prohibitivas y por tanto no resultan adecuadas para obtener modelos predictivos exhaustivos. Una alternativa conveniente de análisis son los métodos numéricos de homogenización, los cuales se usan para determinar propiedades mecánicas de un material heterogéneo celular a partir del análisis de una pequeña porción de él (un modelo micro-mecánico). En este trabajo se utiliza un procedimiento de homogenización para obtener las matrices de rigidez para dos láctices hexagonales, uno regular y otro auxético. Para la estructura hexagonal regular la matriz de rigidez efectiva obtenida es representativa de un material isotrópico, mientras que para la hexagonal auxética la matriz es distintiva de un material ortotrópico, con coeficiente de Poisson negativo. Las expresiones obtenidas para las relaciones constitutivas quedan definidas en función de los parámetros geométricos y propiedades elásticas de la celda unitaria (micro-estructura), lo cual es importante para el diseño y optimización de estructuras reticulares.

Palabras Clave: ecuaciones constitutivas, estructuras auxéticas, materiales celulares.

Abstract

Lattice materials are cellular materials with a regular periodic microstructure, which extends over large distances in all directions and can be idealized as a wide grid of bars and struts. An unusual type of cellular materials with technological potential is the auxetic cellular structure, which exhibits a negative Poisson coefficient. Numerous analytic methods have been proposed to study the mechanical behavior of cellular auxetic materials. Experimental research has also been conducted but it has been limited by manufacturing issues. In recent decades numerous works have used finite element analysis to predict auxetic behavior and other mechanical properties, however, full finite element models (with thousand of degrees of freedom) are often unaffordable and thus they are not suitable to obtain complete predictive models. A convenient alternative of analysis belongs to the numerical methods of homogenization, which are used to determine the mechanical properties of a heterogeneous cellular material from the analysis of a small part of it

(a micro-mechanical model). In this work a homogenization procedure is used to obtain the stiffness matrix for two hexagonal lattices, one regular and one auxetic. For the regular hexagonal structure the effective stiffness matrix is representative of an isotropic material, whereas the stiffness matrix of the auxetic hexagonal structure is distinctive of an orthotropic material, with a negative Poisson coefficient. The obtained expressions for the constitutive relations are defined as a function of the geometric parameters and elastic properties of the unit cell (micro-structure), which is important for the design and optimization of lattice materials.

Keywords: constitutive equations, auxetic structures, cellular materials.

1. Introducción

Materiales reticulares (látice) son un tipo de materiales celulares caracterizados por una micro-estructura periódica regular, la cual puede idealizarse como una red de vigas o barras delgadas. Estos materiales látice existen sobre un amplio espectro de escalas desde la nanométrica hasta la macroscópica y han encontrado aplicaciones interesantes en diversas áreas tecnológicas. A nivel nanométrico, la mayoría de los sensores basados en nanotubos de carbono son fabricados usando materiales látice. Materiales látice en la escala microscópica se han desarrollado intensivamente debido a que poseen gran capacidad de absorción de energía. A nivel macroscópico los materiales látice son usados ampliamente en la industria aeroespacial por su ligereza y alta rigidez [Somnic y Jo, 2022]. Una clase especial de materiales celulares con buen potencial de aplicación tecnológica son las estructuras celulares auxéticas o reentrantes, las cuales ostentan un coeficiente de Poisson negativo de tal manera que, a diferencia de las estructuras celulares regulares, muestran una expansión lateral al ser sometidos a tensión axial, figura 1.

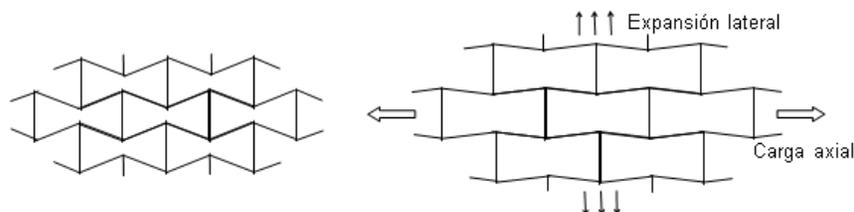


Figura 1 Estructura celular auxética.

El comportamiento contra-intuitivo exhibido por este tipo de estructuras fue introducido primero por R. Lakes [Lakes, 1987]. Estructuras auxéticas poseen un potencial atractivo para varias aplicaciones tales como núcleos de paneles sándwich (alta rigidez al corte y resistencia a la indentación), estructuras para disipación de energía y sonido (habilidad para disipación de energía), espumas de relleno automotrices y aeroespaciales, y bio-implantes [Mazaev, 2020]. Avances recientes en técnicas de manufactura han permitido la producción de materiales látice fabricados de diversos materiales sólidos, a diferentes escalas, con una exactitud alta y dentro de costos aceptables. Tales tecnologías han convertido a los materiales látice con características auxéticas en una opción viable en el diseño de productos de consumo; esto a su vez ha impulsado el interés en el desarrollo de herramientas de modelación para el análisis de componentes complejos de materiales látice. En las últimas décadas, una gran cantidad de investigaciones se han dedicado al diseño y desarrollo de estructuras auxéticas, las cuales en general se enfocan a la modelación de comportamientos auxéticos y a la caracterización experimental de dichas estructuras. La mayoría de los estudios analíticos publicados en la modelación de estructuras auxéticas se concentran principalmente en sus mecanismos de deformación [Theocaris et al 1997, Williams et al, 2007]. En numerosos estudios, se han usado análisis de elementos finitos (FEM) para predecir comportamiento auxético y otras propiedades mecánicas [Lira et al 2009, Yang et al 2003]. Sin embargo, simulaciones de componentes de consumo con modelos completos de elemento finito (con miles de grados de libertad) son con frecuencia inaccesibles y por tanto no resultan adecuadas para obtener modelos predictivos exhaustivos. La homogenización computacional es un método para determinar la ecuación constitutiva efectiva de un modelo continuo a partir de un modelo micro-mecánico; se basa en igualar las expresiones de trabajo virtual de los dos modelos y en diversas investigaciones se ha usado para determinar los parámetros elásticos efectivos de materiales con microestructura. Existen muchos tipos de métodos de homogenización para analizar el comportamiento de materiales látice. Todos estos métodos vienen de varias disciplinas tales como teoría de elasticidad, física del estado sólido y recientemente de ciencias de la computación (inteligencia artificial).

En este trabajo se utiliza un procedimiento de homogenización, el cual pertenece a los métodos que usan un elemento de volumen representativo (RVE) [Kouznetsova et al 2001, Vigliotti & Pasini, 2012]. El RVE consiste de una región limitada del dominio que contiene las características micro-estructurales del material (al incluir al menos una celda unitaria) y se comporta como el medio infinito, siempre que una deformación uniforme, o esfuerzo, y las condiciones de frontera adecuadas sean aplicados. El procedimiento usado aquí se basa en una aproximación a dos escalas, donde las propiedades macroscópicas del látice se determinan al expresar la energía de deformación microscópica en función del campo de deformaciones macroscópico. Condiciones de equilibrio periódicas se aplican en la celda unitaria, mientras que suposiciones cinemáticas se aplican solamente en los nodos frontera de la celda. Esta formulación lleva a expresiones matriciales compactas para las ecuaciones constitutivas. Entonces, en la presente contribución se aplica el método de homogenización mencionado para obtener la matriz de rigidez efectiva (homogénea) de un material formado por una estructura reticular hexagonal reentrante (auxética) y una hexagonal regular (solo para fines de comparación) en base a su micro-estructura. La razón de haber elegido la presente formulación es que se puede extender de manera natural para incluir en trabajos posteriores no-linealidades geométricas o materiales [Ma & Zhang, 2023]. Más aún, se presenta una aportación adicional por parte de los autores relacionada con la manera de obtener las matrices involucradas, ya que en el trabajo de Vigliotti & Pasini la forma en que son generadas las matrices involucradas no es del todo clara desde el punto de vista de la mecánica del problema. Por tanto, la proposición de los autores es que las matrices se obtienen de las representaciones matriciales de transformaciones lineales con respecto a las bases estándar de ciertos espacios vectoriales involucrados.

2. Métodos

La figura 2 muestra dos estructuras celulares hexagonales, la primera es regular mientras que la segunda es auxética. Se observan los elementos de volumen representativo (RVE) y la celda unitaria para ambas estructuras.

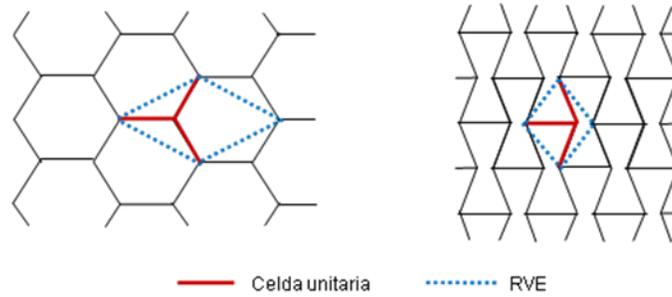


Figura 2 Látices hexagonal regular y auxético.

Se observa también de la figura 2 que la celda unitaria de la estructura hexagonal regular puede evolucionar a la celda unitaria auxética al reducir dos de los ángulos adyacentes de 120° a ángulos menores de 90° . Por tanto, para el desarrollo del procedimiento de obtención de las ecuaciones constitutivas, de aquí en adelante se considera solamente la estructura regular hexagonal por conveniencia.

Para calcular la ecuación constitutiva de estructuras celulares auxéticas, es necesario considerar la deformación de la celda unitaria bajo un campo de deformaciones constante. En este sentido, considérese la figura 3, en donde la posición de cada nodo en el látice está dada por

$$\mathbf{r}_k(\mathbf{l}) = \mathbf{r}_k + l_i \mathbf{a}_i \quad (1)$$

Donde \mathbf{r}_k es la posición del nodo k de la celda unitaria, $\mathbf{r}_k(\mathbf{l})$ las posiciones de los nodos correspondientes a \mathbf{r}_k , $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ los vectores traslacionales periódicos y $k = 1, \dots, J$ el número de nodos en la celda unitaria, $\forall l_i \in N$.

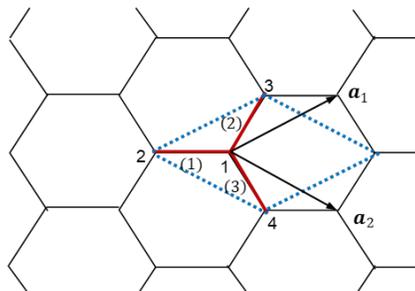


Figura 3 Celda unitaria hexagonal y direcciones periódicas.

En la ecuación 1 la posición de cada nodo se obtiene tomando como referencia nodos k conocidos como nodos independientes. Para el caso del látice hexagonal

el nodo 2 es independiente, mientras que los nodos 3 y 4 son dependientes y su posición está definida por ecuaciones 2 y 3.

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_1 \quad (2)$$

$$\mathbf{r}_4 = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_2 \quad (3)$$

Es necesario mencionar que todos los nodos internos de la celda unitaria son independientes, como lo es el nodo 1 de la celda unitaria hexagonal. Enseguida, se considera la aplicación de un campo de deformaciones uniforme en el plano (ecuación 4), de tal manera que la deformación de la celda unitaria se define por la deformación de las direcciones periódicas, ecuación 5.

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \gamma_{xy} \\ \gamma_{xy} & \epsilon_y \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\mathbf{a}'_i = \mathbf{a}_i + \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{a}_i \quad (5)$$

Lo anterior conduce a que la posición del nodo k del látice deformado este dado por ecuación 6.

$$\mathbf{r}'_k(\mathbf{l}) = \mathbf{r}'_k + l_i \mathbf{a}'_i = \mathbf{r}'_k + l_i (\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{a}_i \quad (6)$$

Mientras que los desplazamientos de los nodos se calculan por ecuación 7.

$$\mathbf{d}_k(\mathbf{l}) = \mathbf{r}'_k(\mathbf{l}) - \mathbf{r}_k(\mathbf{l}) = \mathbf{d}_k + l_i \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{a}_i \quad (7)$$

La figura 4 muestra las configuraciones de referencia y deformada de la celda unitaria, donde se distinguen las posiciones de solamente algunos nodos en las dos configuraciones, así como los desplazamientos de ciertos nodos, por simplicidad.

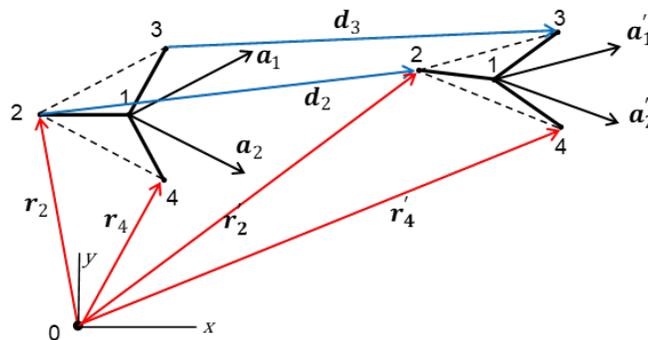


Figura 4 Celda unitaria de referencia y deformada.

En adición, se pueden observar las direcciones periódicas de referencia y deformadas. Por conveniencia, la ecuación 7, puede establecerse en forma matricial, ecuación 8.

$$\mathbf{d} = \mathbf{B}_0 \mathbf{d}_0 + \mathbf{B}_e \mathbf{e}, \quad (8)$$

donde \mathbf{d} , es el arreglo que contiene todos los grados de libertad de los nodos de la celda unitaria, \mathbf{B}_0 la matriz asociada a una transformación lineal que considera las condiciones de frontera periódicas, \mathbf{d}_0 arreglo que contiene los grados de libertad de los nodos independientes, \mathbf{B}_e matriz asociada a una transformación lineal que mapea el campo de deformaciones macroscópico a los desplazamientos de los nodos dependientes y \mathbf{e} arreglo que contiene las componentes del campo de deformaciones (usando convención de Voigt), ecuaciones 9 y 10.

$$\mathbf{e} = [\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \gamma_{xy}] \quad (9)$$

$$\gamma_{xy} = 2\epsilon_{xy} \quad (10)$$

El vector \mathbf{d}_0 , el cual contiene los grados de libertad de los nodos independientes, se determina al imponer la condición de auto-equilibrio en las fuerzas nodales de la celda unitaria no restringida, ecuación 11,

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad (11)$$

donde \mathbf{A}_0 es la matriz de equilibrio que depende de la topología de la celda unitaria y de las direcciones periódicas, ecuación 12, \mathbf{f} es el vector de fuerzas nodales de la celda unitaria (ecuación 13), se obtiene al aplicar la matriz de rigidez de la celda unitaria, \mathbf{K}_{uc} , al vector de grados de libertad totales de la celda unitaria.

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{B}_0^T \quad (12)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}_{uc} \mathbf{d} \quad (13)$$

\mathbf{K}_{uc} se obtiene mediante técnicas de ensamble de elemento finito, considerando que las tres barras de la celda unitaria son tres elementos finitos viga-barra. En este punto es necesario aclarar que dentro del presente método de homogenización se usa el método de elementos finitos solamente a nivel celda unitaria, ya que se requiere obtener su rigidez \mathbf{K}_{uc} , para tomar en cuenta el efecto de la deformación de la celda unitaria con su entorno o medio infinito.

Al sustituir f en la ecuación 11, y tomando en cuenta la ecuación 12, tenemos que:

$$A_0 K_{uc} d = B_0^T K_{uc} d = 0$$

Después de considerar la ecuación 8 para d se llega a:

$$B_0^T K_{uc} (B_0 d_0 + B_e e) = 0$$

De aquí se obtiene un sistema de ecuaciones lineales con d_0 como incógnita,

$$B_0^T K_{uc} B_0 d_0 = -B_0^T K_{uc} B_e e \quad (14)$$

Esta expresión representa el equilibrio de la celda unitaria restringida por las celdas vecinas en el látice. El lado derecho es el residuo de la ecuación de equilibrio, con signo cambiado, resultado del campo de deformaciones macroscópico, si los grados de libertad de los nodos independientes d_0 se mantienen fijos. El lado izquierdo representa el residuo de la ecuación de equilibrio cuando los grados de libertad independientes son diferentes de cero, y no se aplica deformación al látice.

Dado un campo de deformaciones arbitrario e , la solución de la ecuación 8 son los grados de libertad independientes d_0 que garantizan el equilibrio de la celda con sus alrededores. Así, sustituyendo d_0 y e en la ecuación 3 se obtienen los grados de libertad de los nodos de la celda unitaria que cumplen con el campo de deformaciones macroscópico y garantizan el equilibrio de la celda unitaria con su entorno. La solución particular para d_0 esta dada por ecuación 15.

$$d_0 = -(B_0^T K_{uc} B_0)^+ B_0^T K_{uc} B_e e = D_0 e \quad (15)$$

Donde $(\cdot)^+$ es la pseudo-inversa More-Penrose, ya que la matriz de rigidez K_{uc} de la celda unitaria corresponde a la celda no restringida y la inversa convencional no puede ser usada. Luego, los desplazamientos de todos los nodos de la celda unitaria son obtenidos mediante ecuación 16.

$$d = (B_0 D_0 + B_e) e = D_e e \quad (16)$$

Se observa que la matriz D_e relaciona las componentes de la deformación macroscópica con los grados de libertad de los nodos de la celda unitaria. Además, la energía de deformación del látice queda expresada por ecuación 17.

$$W = \frac{1}{2S_{uc}} e^T D_e^T K_{uc} D_e e \quad (17)$$

y de aquí la matriz de rigidez macroscópica es expresada por ecuación 18.

$$\mathbf{K} = \frac{1}{S_{uc}} \mathbf{D}_e^T \mathbf{K}_{uc} \mathbf{D}_e \quad (18)$$

Donde S_{uc} es el área de la celda unitaria. Se observa que para la obtención de la ecuación constitutiva dada por ecuación 18 es necesario en esencia el cálculo de 3 matrices; la matriz \mathbf{K}_{uc} la cual se obtiene al ensamblar 3 matrices de elemento finito para cada uno de los elementos viga-barra de la celda unitaria, identificados con números entre paréntesis, en la figura 3; la matriz \mathbf{B}_e asociada a una transformación lineal que mapea el campo de deformaciones macroscópico a los desplazamientos de los nodos dependientes; y finalmente la matriz \mathbf{B}_0 la cual se obtiene a través de la matriz de equilibrio \mathbf{A}_0 mediante la ecuación 12.

3. Resultados

En primer lugar, se construyen las matrices fundamentales para la aplicación del procedimiento de homogenización. La matriz de rigidez local para un elemento finito viga-barra de orientación arbitraria, figura 5, está definida por ecuación 19, donde A es el área de la sección transversal del elemento, L longitud del elemento, I momento de inercia del área de la sección transversal del elemento y E_s módulo elástico del elemento.

$$\frac{E_s}{L} \begin{bmatrix} Ac^2 + \frac{12I}{L^2}s^2 & \left(A - \frac{12I}{L^2}\right)cs & -\frac{6I}{L}s & -\left(Ac^2 - \frac{12I}{L^2}s^2\right) & -\left(A - \frac{12I}{L^2}\right)cs & -\frac{6I}{L}s \\ \left(A - \frac{12I}{L^2}\right)cs & As^2 + \frac{12I}{L^2}c^2 & \frac{6I}{L}c & -\left(A - \frac{12I}{L^2}\right)cs & -\left(As^2 - \frac{12I}{L^2}c^2\right) & \frac{6I}{L}c \\ -\frac{6I}{L}s & \frac{6I}{L}c & 4I & \frac{6I}{L}s & -\frac{6I}{L}c & 2I \\ -\left(Ac^2 - \frac{12I}{L^2}s^2\right) & -\left(A - \frac{12I}{L^2}\right)cs & \frac{6I}{L}s & Ac^2 + \frac{12I}{L^2}s^2 & \left(A - \frac{12I}{L^2}\right)cs & \frac{6I}{L}s \\ -\left(A - \frac{12I}{L^2}\right)cs & -\left(As^2 - \frac{12I}{L^2}c^2\right) & -\frac{6I}{L}c & \left(A - \frac{12I}{L^2}\right)cs & As^2 + \frac{12I}{L^2}c^2 & -\frac{6I}{L}c \\ -\frac{6I}{L}s & \frac{6I}{L}c & 2I & \frac{6I}{L}s & -\frac{6I}{L}c & 4I \end{bmatrix} \quad (19)$$

Donde:

$$s = \text{sen}\theta, \quad c = \text{cos}\theta$$

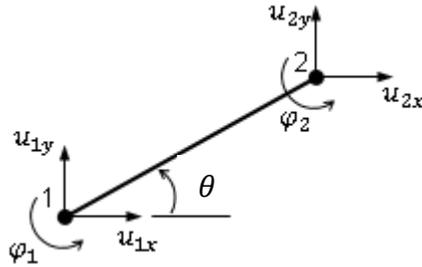


Figura 5 Elemento finito viga-barra con 3 grados de libertad por nodo.

La matriz K_{uc} para la celda unitaria se obtiene al ensamblar mediante técnicas de elemento finito las tres matrices locales con las orientaciones correspondientes.

La segunda matriz es la matriz B_0 , la cual se construye a partir de la matriz A_0 mediante la ecuación 12. Así, la matriz A_0 es la matriz asociada a la siguiente transformacional lineal:

$$A_0: (G^3)^4 \rightarrow (G^3)^2$$

$$(f_1, f_2, f_3, f_4) \mapsto A_0(f_1, f_2, f_3, f_4) = (f_1, f_2 + f_3 + f_4)$$

Donde:

G^3 : espacio vectorial de vectores geométricos en el espacio 3D

f_i : vectores fuerza de grados de libertad de los nodos de la celda unitaria.

La matriz asociada se construye por columnas mapeando los vectores fuerza unitarios de la base de los espacios involucrados, ecuación 20.

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Finalmente, la matriz B_e es la matriz que relaciona el campo macroscópico de deformaciones con los desplazamientos de los nodos dependientes de la celda unitaria. Entonces, la matriz se obtiene al considerar la transformación lineal:

$$B_e: \mathbf{R}^3 \rightarrow (G^3)^4$$

$$(\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}) \mapsto B_e(\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}) + (0, 0, 0, 0, 0, \epsilon_x a_{1x} + \frac{1}{2} \gamma_{xy} a_{1y}, \frac{1}{2} \gamma_{xy} a_{1x} + \epsilon_y a_{1y}, 0, \epsilon_x a_{2x} + \frac{1}{2} \gamma_{xy} a_{2y}, \frac{1}{2} \gamma_{xy} a_{2x} + \epsilon_y a_{2y}, 0)$$

Donde \mathbf{R}^3 es el espacio euclideo de puntos en el espacio 3D y $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ las componentes del campo de deformaciones.

La matriz asociada se construye por columnas mapeando las deformaciones unitarias de la base de los espacios involucrados, ecuación 21.

$$B_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{1x} & 0 & \frac{a_{1y}}{2} \\ 0 & a_{1y} & \frac{a_{1x}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{2x} & 0 & \frac{a_{2y}}{2} \\ 0 & a_{2y} & \frac{a_{2x}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

La figura 6 muestra los vectores de las direcciones periódicas para el látice hexagonal regular y para el hexagonal auxético, mientras que en la figura 7 se presenta la obtención de tales vectores de manera genérica para ambos látices, en función del ángulo θ . Entonces, de manera general las direcciones periódicas quedan establecidas mediante ecuaciones 22 y 23.

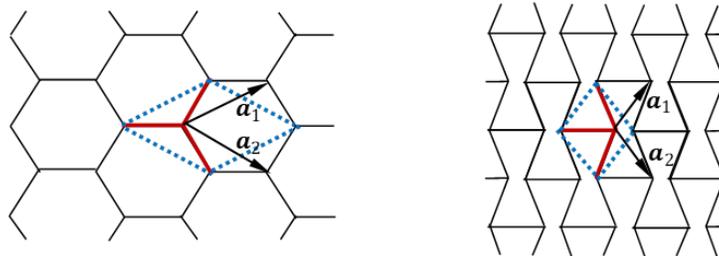


Figura 6 Direcciones periódicas para látices regular y auxético.

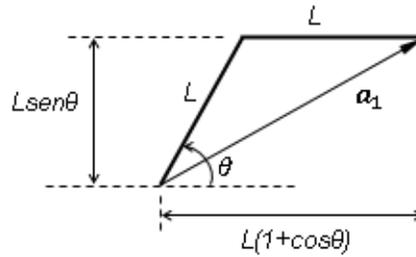


Figura 7 Vectores de direcciones periódicas.

$$\mathbf{a}_1 = L(1 + \cos\theta)\mathbf{i} + L\sin\theta\mathbf{j} \quad (22)$$

$$\mathbf{a}_2 = L(1 + \cos\theta)\mathbf{i} - L\sin\theta\mathbf{j} \quad (23)$$

Así, para el látice hexagonal regular:

$$\theta = 60^\circ, \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{a}_1 = L\left(1 + \frac{1}{2}\right)\mathbf{i} + L\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}_2 = L\left(1 + \frac{1}{2}\right)\mathbf{i} - L\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$$

Mientras que para el hexagonal reentrante son:

$$\theta = 120^\circ, \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\mathbf{a}_1 = L\left(1 - \frac{1}{2}\right)\mathbf{i} + L\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}_2 = L\left(1 - \frac{1}{2}\right)\mathbf{i} - L\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$$

El área de la celda unitaria se obtiene de la relación

$$S_{uc} = |\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|$$

Para calcular las propiedades geométricas de los elementos viga-barra se hace referencia a la figura 8, una celda hexagonal regular. Por tanto, se tiene que: $A = bt$ y $I_z = \frac{1}{12}bt^3$, donde t es el espesor de la pared de la celda y b el ancho de la pared de la celda.

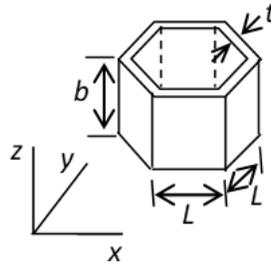


Figura 8 Parámetros geométricos celda hexagonal regular.

Finalmente, las manipulaciones matriciales consideradas en las ecuaciones 15, 16 y 18 se realizan mediante la ayuda del software Maple®, y se llega a las matrices de rigidez (parte fundamental de las ecuaciones constitutivas) para los láctices hexagonal regular y hexagonal reentrante, ecuaciones 24 y 25.

$$K_{reg} = \begin{bmatrix} \frac{1\sqrt{3}E_s A(AL^2 + 36I_z)}{6 L(AL^2 + 12I_z)} & \frac{1\sqrt{3}E_s A(AL^2 - 12I_z)}{6 L(AL^2 + 12I_z)} & 0 \\ \frac{1\sqrt{3}E_s A(AL^2 - 12I_z)}{6 L(AL^2 + 12I_z)} & \frac{1\sqrt{3}E_s A(AL^2 + 36I_z)}{6 L(AL^2 + 12I_z)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4\sqrt{3}E_s I_z A}{L(AL^2 + 12I_z)} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$K_{reen} = \begin{bmatrix} \frac{1\sqrt{3}E_s A(AL^2 + 36I_z)}{18 L(AL^2 + 12I_z)} & -\frac{1\sqrt{3}E_s A(AL^2 - 12I_z)}{6 L(AL^2 + 12I_z)} & 0 \\ \frac{1\sqrt{3}E_s A(AL^2 - 12I_z)}{6 L(AL^2 + 12I_z)} & \frac{1\sqrt{3}E_s A(AL^2 + 36I_z)}{2 L(AL^2 + 12I_z)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4\sqrt{3}E_s I_z A}{L(3AL^2 + 4I_z)} \end{bmatrix} \quad (25)$$

Obsérvese que los coeficientes de las matrices de rigidez quedan dados en términos de los parámetros geométricos de la celda, así como del módulo elástico del material de la misma celda.

4. Discusión

Se observa que las matrices de rigidez dadas por las ecuaciones 24 y 25 se ajustan a la siguiente forma general:

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}$$

La cual corresponde a un material ortotrópico para el caso de esfuerzos planos con cuatro coeficientes diferentes [Jones, 1999]. Al observar detalladamente la matriz de rigidez (Ecuación 24) para el látice hexagonal regular se tiene que para dicha matriz $Q_{11} = Q_{22}$. Consecuentemente, la matriz de rigidez para el látice hexagonal regular corresponde a un material isotrópico, ecuaciones 26 a 28.

$$Q_{11_{iso}} = Q_{22_{iso}} = \frac{E}{1 - \nu^2} = \frac{1}{6} \frac{\sqrt{3}E_s A(AL^2 + 36I_z)}{L(AL^2 + 12I_z)} \quad (26)$$

$$Q_{12_{iso}} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} = \frac{1}{6} \frac{\sqrt{3}E_s A(AL^2 - 12I_z)}{L(AL^2 + 12I_z)} \quad (27)$$

$$Q_{66_{iso}} = \frac{E}{2(1 + \nu)} = G_{iso} = \frac{4\sqrt{3}E_s I_z A}{L(AL^2 + 12I_z)} \quad (28)$$

Las constantes elásticas E , ν y G representan el módulo elástico, el coeficiente de Poisson y el módulo de corte, respectivamente, para el material continuo, esto es, el material que ha sido homogenizado. Recuérdese que para un material isotrópico solo dos constantes independientes son necesarias para caracterizar dicho material, la tercera se obtiene de la ecuación 28. Al resolver ecuaciones 26 y 27, las constantes elásticas vienen dadas por ecuaciones 29 y 30.

$$E_{iso} = 16\sqrt{3} \frac{E_s A I_z}{L(AL^2 + 36I_z)} \quad (29)$$

$$\nu_{iso} = \frac{(AL^2 - 12I_z)}{(AL^2 + 36I_z)} \quad (30)$$

Se observa que para el caso del látice hexagonal regular, y de acuerdo con las dimensiones de la sección transversal, el numerador de la ecuación 30 es positivo para valores pequeños del espesor t . En consecuencia, el coeficiente de Poisson es positivo.

Por otro lado, al analizar la matriz de rigidez 25 correspondiente al látice hexagonal reentrante, se observa que $Q_{11} \neq Q_{22}$, y por tanto la matriz de rigidez equivale a un material ortotrópico, ecuaciones 31 a 34.

$$Q_{11_{orto}} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{1}{18} \frac{\sqrt{3}E_s A(AL^2 + 36I_z)}{L(AL^2 + 12I_z)} \quad (31)$$

$$Q_{22_{orto}} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{1\sqrt{3}E_s A(AL^2 + 36I_z)}{2L(AL^2 + 12I_z)} \quad (32)$$

$$Q_{12_{orto}} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = -\frac{1\sqrt{3}E_s A(AL^2 - 12I_z)}{6L(AL^2 + 12I_z)} \quad (33)$$

$$Q_{66_{orto}} = G_{12_{orto}} = \frac{4\sqrt{3}E_s I_z A}{L(3AL^2 + 4I_z)} \quad (34)$$

Para un material ortotrópico en el plano, las constantes elásticas necesarias para la caracterización de este tipo de materiales son 5, de las cuales 4 son independientes de acuerdo con ecuación 33. Entonces, las constantes materiales para el material ortotrópico, con direcciones materiales 1-2 (Figura 9), son los módulos elásticos en las direcciones 1 y 2, $E_{1_{orto}}$ y $E_{2_{orto}}$, el módulo de rigidez al corte en el plano 1-2, $G_{12_{orto}}$, y los coeficientes de Poisson en el plano, $\nu_{12_{orto}}$ y $\nu_{21_{orto}}$, los cuales se obtienen al cargar axialmente en las direcciones 2 y 1, respectivamente, y medir las deformaciones laterales en las direcciones 1 y 2, respectivamente.

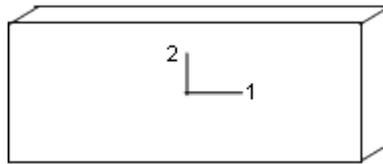


Figura 9 Direcciones materiales 1-2 en el plano.

De ecuaciones 31 a 33 se obtienen las constantes elásticas, ecuaciones 35 a 38.

$$E_{1_{orto}} = \frac{16\sqrt{3}}{3} \frac{E_s A I_z}{L(AL^2 + 36I_z)} \quad (35)$$

$$E_{2_{orto}} = 48\sqrt{3} \frac{E_s A I_z}{L(AL^2 + 36I_z)} \quad (36)$$

$$\nu_{12_{orto}} = -\frac{1(AL^2 - 12I_z)}{3(AL^2 + 36I_z)} \quad (37)$$

$$\nu_{21_{orto}} = -3 \frac{(AL^2 - 12I_z)}{(AL^2 + 36I_z)} \quad (38)$$

La quinta constante, $G_{12_{orto}}$, viene dada directamente por la ecuación 34.

Se observa que para el caso del látice hexagonal reentrante, y de acuerdo con las dimensiones de la sección transversal, la diferencia que aparece en el numerador de las ecuaciones 37 y 38 para los coeficientes de Poisson $\nu_{12_{orto}}$ y $\nu_{21_{orto}}$ es positiva para valores pequeños del espesor t . En consecuencia, los coeficientes de Poisson son negativos, característica principal de los materiales auxéticos.

En la presenta contribución se ha extendido el trabajo desarrollado por Vigliotti & Pasini [Vigliotti & Pasini, 2012] a materiales celulares auxéticos, con una contribución adicional por parte de los autores relacionada con la manera de obtener las matrices involucradas. Dichas matrices son importantes ya que representan el equilibrio de la celda unitaria con su entorno, así como las condiciones de frontera periódicas. Entonces, se propone que las matrices sean representativas de transformaciones lineales con respecto a las bases de los espacios vectoriales involucrados, como se explica detalladamente en la sección 3. Por tanto se aclara un poco, desde una perspectiva física, la manera en que son obtenidas las matrices en el trabajo original de Vigliotti & Pasini.

Por otro lado, es necesario mencionar que el método de homogenización usado presenta ventajas con respecto a otros métodos usados para determinar las propiedades mecánicas de materiales celulares. Con respecto a los trabajos analíticos, éstos sólo se pueden aplicar a látices con densidades relativas bajas y con celdas unitarias simples, mientras que la presente formulación no tiene restricciones en cuanto densidades relativas ni a la geometría de la celda unitaria, requiriendo además muy poca exigencia computacional, a diferencia de otros métodos de homogenización [Somnic y Jo, 2022].

5. Conclusiones

En base a los resultados obtenidos, se llega a las siguientes conclusiones:

- Usando un procedimiento de homogenización se obtuvieron la matriz de rigidez efectiva (homogénea) para un material formado por una estructura reticular hexagonal regular y una reentrante (auxética) en base a su microestructura.

- Las expresiones obtenidas para las relaciones constitutivas quedan definidas en términos de los parámetros geométricos de la celda unitaria (microestructura), así como del módulo elástico de dicha celda. Esto es importante para el diseño y optimización de estructuras reticulares para determinadas aplicaciones al variar los parámetros mencionados.
- La matriz de rigidez de la celda unitaria re-entrante se obtuvo para el caso de un ángulo $\theta = 120^\circ$. Sin embargo, el comportamiento auxético se presenta para ángulos θ dentro del siguiente rango $90^\circ \leq \theta \leq 120^\circ$.
- El procedimiento usado es para materiales reticulares en el plano, dentro del rango elástico lineal. Se puede extender para latices en el espacio 3D, así como para deformaciones no lineales.

Reconocimientos. Los resultados presentados son el resultado de un proyecto financiado por el Tecnológico Nacional de México.

6. Bibliografía y Referencias

- [1] Somnic, J. & Jo, B.W. (2022). Status and challenges in homogenization methods for lattice materials. *Materials*, 15, p. 605.
- [2] Lakes, R. (1987). Foam structures with a negative Poisson's ratios. *Science* 235, pp. 1038-1040.
- [3] Mazaev, A.V., Ajenez, O., Shitikova, M.V. (2020). Auxetic materials: classification, mechanical properties and applications. *IOP Conference Series: Material Science and Engineering*, 747 012008.
- [4] Theocaris, P.S., Stavroulakis, G.E., Panagiotopoulos, P.D. (1997). Negative Poisson's ratio in materials with a star-shape microstructure. A numerical homogenization approach. *Archive of Applied Mechanics*, 67, pp. 274-286
- [5] Lira, C., Innocenti, P., Scarpa, F. (2009). Transverse elastic shear of auxetic multi-reentrant honeycombs. *Composite Structures*, 90, pp 314-322.
- [6] Yang, D.U., Lee, S., Huang, F.Y. (2003). Geometric effects on micropolar elastic honeycomb structure with negative Poisson's ratio using the finite element method. *Finite Element Design*, 39, pp. 187-205.

- [7] Williams, J.J., Smith, C.W., Evans, K.E., Lethbridge, Z.A.D., Walton, R.I. (2007). An analytical model to produce negative Poisson's ratios and its application in explaining off-axis elastic properties of the NAT-type zeolites, *Acta Materialia* 55, pp. 5697-5707.
- [8] Kouznetsova, V., Brekelmans, W.A.M., Baaijens, F.P.T. (2001). An approach to micro-macro modeling of heterogeneous materials. *Computational Mechanics*, 27, pp. 37-48.
- [9] Viglioti, A., Passini, D. (2012). Linear multiscale analysis and finite element validation of stretching and bending dominated lattice materials. *Mechanics of Materials*, 46, pp. 57-68.
- [10] Jones, R.M. *Mechanics of Composite Materials*, 2nd Ed., Taylor & Francis, 1999.
- [11] Ma, Q., Zhang, J. (2023). Nonlinear constitutive and mechanical properties of an Auxetic Honeycomb Structure. *Mathematics*, 11, p. 2062.