

MODELADO DINÁMICO Y CONTROL DE VELOCIDAD PI APLICADO A UN VEHÍCULO ELÉCTRICO CONTEMPLANDO FUERZAS EXTERNAS DE OPOSICIÓN

*DYNAMIC MODELING AND PI SPEED CONTROL APPLIED
TO AN ELECTRIC VEHICLE CONTEMPLATING
OPPOSITION EXTERNAL FORCES*

Juan Eduardo Esquivel Cruz

Universidad Politécnica de Tulancingo, México
juan.esquivel2115002@upt.edu.mx

Luis Daniel Cárdenas Soto

Universidad Autónoma Metropolitana, México
al2162003056@azc.uam.mx

Francisco Beltrán Carbajal

Universidad Autónoma Metropolitana, México
fbeltran@azc.uam.mx

Iván de Jesús Rivas Cambero

Universidad Politécnica de Tulancingo, México
ivan.rivas@upt.edu.mx

Alexis Castelán Pérez

Universidad Politécnica de Tulancingo, México
alexis.castelan1294@upt.edu.mx

Recepción: 5/diciembre/2022

Aceptación: 19/marzo/2023

Resumen

En busca de alternativas para reducir la contaminación por el uso de combustibles fósiles, el desarrollo de vehículos eléctricos se ha popularizado considerablemente para la movilidad de manera eficiente. Para este tipo de vehículos se requiere el diseño de controladores automáticos para mejorar la eficiencia en el seguimiento de perfiles de velocidad. En este artículo se presenta el modelado matemático de la dinámica de un vehículo a partir de la segunda ley de Newton considerando las fuerzas externas que se pueden presentar durante su movimiento, ya que comúnmente no se toman en cuenta en el proceso de diseño

de control. Se propone el diseño de una técnica de control de torque tipo Proporcional Integral (PI) para seguimiento de trayectorias de referencia de velocidad, considerando posibles escenarios de movilidad y diferentes perfiles de velocidad utilizando trayectorias de velocidad generadas con curvas de Bezier.

Palabras Clave: Control Automático, curva de Bezier, modelado matemático, transmisión de potencia mecánica, vehículos eléctricos.

Abstract

In search of alternatives to reduce pollution from the use of fossil fuels, the development of electric vehicles has become popular with great reduction for mobility efficiently. For this type of vehicles, the design of automatic controllers is required to improve efficiency in following speed profiles. Mathematical modeling of the dynamics of a vehicle from Newton's second law considering the external forces that may occur during its movement is presented in this paper, since they are probably not taken into account in the control design process. The design of a Proportional Integral (PI) type torque control technique is proposed to follow speed reference trajectories, considering possible mobility scenarios and different speed profiles using speed trajectories generated with Bezier curves.

Keywords: *Automatic control, bezier curves, mathematical modeling, mechanic power transmission, electric vehicles.*

1. Introducción

Desde el siglo XIX, los combustibles fósiles han sido la fuente más utilizada para transformar la energía en forma de trabajo. Alrededor del 70% del consumo del petróleo es empleado por los medios de transporte, esto genera emisiones contaminantes para el medio ambiente contribuyendo a un aceleramiento del cambio climático [Garcia, 2013], [Lin, 2013].

Es por ello que, dada la popularidad de este tema en los últimos años, se ha optado por implementar nuevas energías alternativas para poder sustituir los combustibles fósiles. Las recientes novedades se presentan en congresos internacionales del sector de la automoción como el de la Asociación Europea de Ingenieros de

Automoción (EAEC), en donde se menciona que, a corto y medio plazo, la industria del automóvil buscare alternativas eléctricas [Andreescu, 2015].

Dado que el transporte juega un papel importante en las energías renovables, se da resolución de dos problemas a la vez, la seguridad energética y el cambio climático [Ruis, 2011]. Los vehículos eléctricos se han popularizado y parecen ser la sustitución más prometedora de los vehículos que dependen de combustibles. Dichos vehículos, que como su nombre lo menciona, son propulsados por energía eléctrica a través de motores eléctricos [Bhatt, 2019], [Rocha, 2017].

Existen numerosas configuraciones para implementar la tracción de vehículos eléctricos, entre las más generales se puede nombrar el uso de un solo motor eléctrico acoplado a una caja de reducción con diferencial mecánico para generar la tracción de las ruedas [Chan, 2002]. En la construcción del accionamiento para el control de los motores, existen distintas estrategias en la literatura actual, las cuales son propuestas según diferentes objetivos como robustez, bajo costo, reducción de sensores, etc. Algunas propuestas utilizan un solo inversor para accionar los motores [Winterhalter, 1997].

En [Duran, 2014] emplean un PWM (ancho de pulso modulado por sus siglas en inglés) senoidal remplazando los comparadores de histéresis y la tabla de conmutación comúnmente empleados en el control directo de par, este tipo de controladores se enfocan directamente en la conmutación del motor. Por otro lado, en artículos como [Gergana, 2020] y [Davide, 2019] proponen controladores con modelos predictivos contemplando el vehículo como una planta, dejando de lado el análisis del tren de potencia. Algo cercano al estudio del tren de potencia se puede ver en [Jairo, 2021] donde a partir del engranaje se formula una relación entre ellos, sin embargo, no realizan un análisis completo de todos los elementos que componen un tren de potencia.

En el presente estudio se realiza el modelado matemático de la dinámica del tren de potencia completo, brindando un dominio total del modelo del vehículo considerando las fuerzas de perturbación posibles que se le presentan mediante el análisis y comportamiento en el traslado, tomando como entrada el motor representado como un torque de control [Haddoun, 2007]. Dicho modelo se realiza

en tres etapas, mismas que a su vez, seleccionada la configuración deseada para el modelado, se unirán en una sola ecuación, este modelo se obtendrá a partir de ecuaciones regidas por las Leyes de Newton, obteniendo la distribución de la potencia a lo largo de todos los componentes y ejes del tren de potencia.

Se evalúa el desempeño de un vehículo con el apoyo del software Matlab, simulando la dinámica y tomando valores de la literatura para los parámetros con el fin de observar el comportamiento de la potencia lo más acercado al comportamiento de un vehículo físico. Se desarrolla un controlador Proporcional-Integral PI para mejorar la respuesta de desempeño de velocidad del vehículo, usando una trayectoria de Bézier para tener una referencia cercana a una respuesta realista, comprobando así el comportamiento del sistema en lazo cerrado y trabajar en una plataforma completa para pruebas futuras.

2. Métodos

La energía producida por el motor no es suficiente por sí misma para producir el movimiento del vehículo, por lo que el motor del vehículo requiere un tren de potencia para transferir esta energía a las ruedas del vehículo. Para obtener el modelo de la Dinámica del sistema de propulsión de un vehículo es necesario considerar cinco elementos principales, el embrague, la caja de cambios, el diferencial, los ejes de tracción y los neumáticos.

Para el modelo matemático del sistema de propulsión, se realiza el análisis de la sumatoria de fuerzas del vehículo. Cuando un vehículo se encuentra en una pista sin pendiente, algunas de las fuerzas a la que se ve sometido serán igual a cero, por lo que el mejor análisis es cuando el vehículo se encuentra en una pista con inclinación, es decir, en una pendiente. Como se puede observar en la figura 1, el vehículo se representa como la masa m , la cual tiene una inclinación igual al ángulo de la pendiente, misma que presenta fuerzas que se opondrán al movimiento.

En la ecuación 1, por segunda ley de Newton, las fuerzas externas se igualan a las fuerzas que interactúan a la oposición del movimiento, las cuales son, la fuerza de resistencia a la rodadura, fuerza de resistencia al avance, fuerza de resistencia a la pendiente (debido a la inclinación de la pista) y fuerza de resistencia a la fricción.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(t) - F_{ro}(t) - F_{av}(t) - F_p(t) - F_f(t) \quad (1)$$

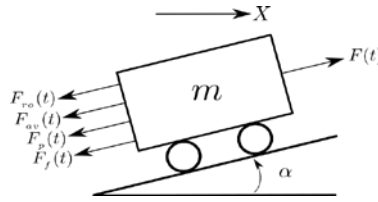


Figura 1 Fuerzas de interacción sobre un cuerpo concentrada en una superficie inclinada.

El momento de resistencia a la rodadura se produce al entrar en contacto el neumático con el pavimento. Esto se puede aproximar como constante y directamente proporcional al peso del vehículo como se muestra en la ecuación 2.

$$F_{ro} = m g f \cos (\alpha) \quad (2)$$

Donde:

- m = masa total del vehículo [kg].
- f = relación de resistencia a la rodadura.
- g = constante de la gravedad $\left[\frac{m}{s^2}\right]$.
- α = ángulo de inclinación del pavimento [°].

La fuerza de resistencia al avance se expresa en la ecuación 3.

$$F_{av} = \frac{1}{2} \rho S C_x v^2 \quad (3)$$

Donde:

- ρ = Densidad del aire $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$.
- S = Superficie del vehículo $[m^2]$.
- C_x = Coeficiente aerodinámico.
- v = Velocidad del vehículo $\left[\frac{m}{s}\right]$.

Al encontrarse una pendiente en el traslado del vehículo se requiere de una fuerza adicional para compensar el propio peso, a esta fuerza la llamamos fuerza de resistencia a la pendiente F_p . Dicha fuerza se puede expresar por ecuación 4.

$$F_p = m g \sen (\alpha) \quad (4)$$

Para la fuerza de resistencia por fricción, se tiene un valor “ K_A ” que es igual al coeficiente de Stokes y se multiplica por la velocidad, ecuación 5.

$$F_f = K_A v \quad (5)$$

Sustituyendo las ecuaciones 2 a 5 en la ecuación 1 se llega a la ecuación 6 y separando las variables dependientes se llega a la ecuación 7.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(t) - mgf \cos \alpha - \frac{1}{2} \rho S C_x \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - mg \sin \alpha - K_A \frac{dx}{dt} \quad (6)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{2} \rho S C_x \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + K_A \frac{dx}{dt} = F(t) - mgf \cos \alpha - mg \sin(\alpha) \quad (7)$$

Para la fuerza externa de tracción y carga del vehículo se utiliza la ecuación 8, que se opone al vehículo en movimiento.

$$F(t) = \frac{\tau_0}{R} \quad (8)$$

Sustituyendo la ecuación 8 en la ecuación 7 se obtiene la ecuación 9.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{2} \rho S C_x \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + K_A \frac{dx}{dt} = \frac{\tau_0}{R} - mgf \cos \alpha - mg \sin(\alpha) \quad (9)$$

Y despejando τ_0 se obtiene la ecuación 10.

$$\tau_0 = R \left(mgf \cos \alpha + mg \sin \alpha + m \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{2} \rho S C_x \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + K_A \frac{dx}{dt} \right) \quad (10)$$

En el modelado de la dinámica de los neumáticos se analizan inicialmente las fuerzas que actúan sobre una pendiente como se observa en la figura 2. Contemplando que τ_0 es el torque que se opone al movimiento del vehículo.

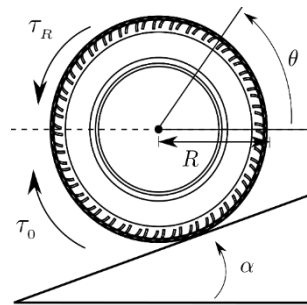


Figura 2 Torques aplicados a neumáticos en una pista con inclinación.

Para sistemas rotacionales, en la ecuación 11 se tiene que I es igual al momento de inercia del neumático, $\ddot{\theta}$ es la aceleración angular de la rueda y τ_0 es el torque aplicado generado por el neumático, necesario para que el vehículo pueda desplazarse y τ_r es el torque de reacción por inercia.

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = \tau_R - \tau_0 \quad (11)$$

Para un neumático se tiene que el momento de inercia será igual a la ecuación 12.

$$I = \frac{1}{2}mR^2 \quad (12)$$

Aplicando la primera y segunda derivada al movimiento del neumático se tiene las ecuaciones 13 a 15.

$$x = R\theta \quad (13)$$

$$\frac{dx}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} \quad (14)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = R \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (15)$$

Se sustituirán las ecuaciones 14 y 15 en la ecuación 10 se obtiene la ecuación 16.

$$\tau_0 = R \left[mg(f \cos \alpha + \sin \alpha) + mR \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{2} \rho SC_x R \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + K_A R \frac{d\theta}{dt} \right] \quad (16)$$

despejando τ_R y τ_0 de 11 en 16 se obtiene la ecuación 17.

$$\tau_0 = Rmg(f \cos \alpha + \sin \alpha) + \frac{3}{2}mR^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{2} \rho SC_x R^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + K_A R^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (17)$$

En la figura 3 se tiene el tren de propulsión mecánica, se compone de un motor eléctrico el cual se representa como un torque, seguido de un embrague, la caja de cambios, el diferencial y llegando al neumático.

Para el análisis del movimiento rotacional, obteniendo un modelo matemático de la interacción de fuerzas sobre el eje de transmisión se divide el tren de potencia por ejes, separando cada eje por su DLC (Diagrama de Cuerpo Libre) correspondiente. Para el eje 1 mostrado en la figura 4 se tiene el motor eléctrico, el embrague y la caja de cambios como un torque de salida debido al reposo del tren de carga.

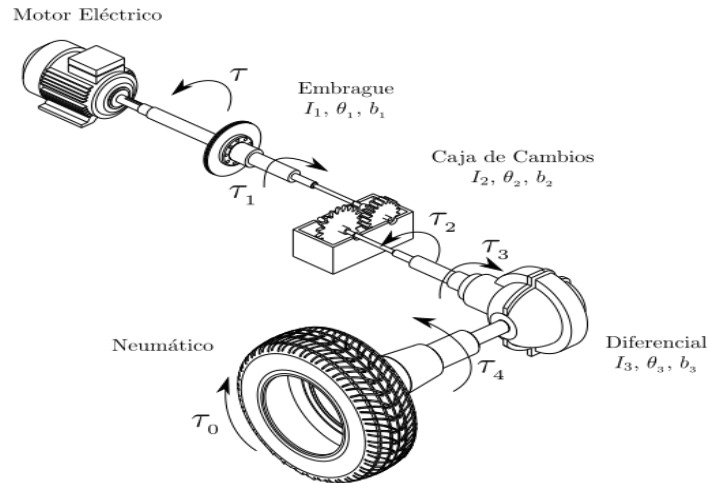


Figura 3 Esquema del tren de propulsión mecánico completo.

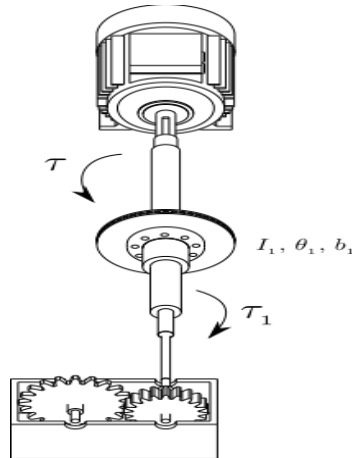


Figura 4 Diagrama de cuerpo libre del eje 1.

El motor eléctrico se contempla como un torque τ el cuál es la entrada del sistema, I_1 y b_1 representan el momento de inercia y el coeficiente de fricción viscosa, τ_1 es el par de carga en el engranaje 1 debido al reposo del tren de carga y $\frac{d^2\theta_1}{dt^2}$ es la aceleración angular del eje 1, utilizando la segunda ley de Newton se obtiene la ecuación 18.

$$I_1 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = \tau - \tau_1 - b_1 \frac{d\theta_1}{dt} \quad (18)$$

De la misma forma se aplica el método sobre el eje 2 contemplando desde la caja de engranaje hasta el diferencial como se muestra en la figura 5.

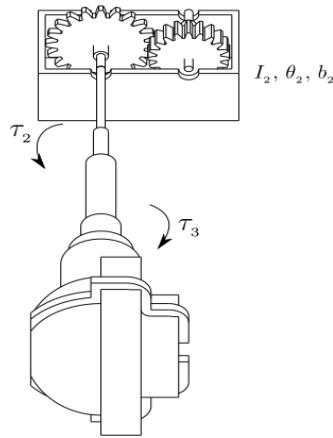


Figura 5 Diagrama de cuerpo libre del eje 2.

Donde τ_2 es la entrada del eje 2, I_2 y b_2 son el momento de inercia y el coeficiente de fricción viscosa, τ_3 es el par de carga en el diferencial y $\frac{d\theta_2}{dt}$ es la aceleración angular en el eje 2, aplicando el mismo método para el movimiento rotacional se llega a la ecuación 19.

$$I_2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = \tau_2 - \tau_3 - b_2 \frac{d\theta_2}{dt} \quad (19)$$

Para finalizar el modelo se contempla el eje 3, desde el diferencial hasta llegar al torque de salida que brinda el neumático como se observa en la figura 6.

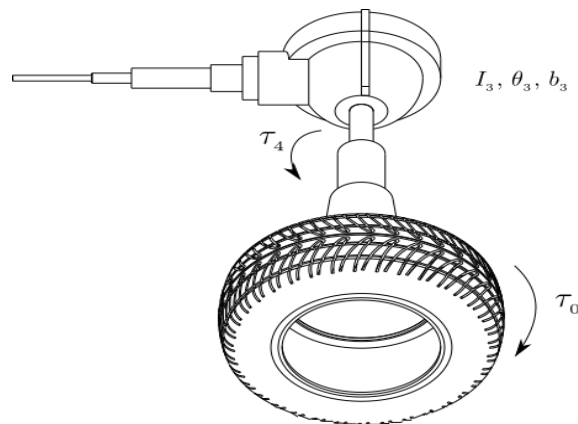


Figura 6 Diagrama de cuerpo libre del eje 3.

Donde τ_4 es la entrada del eje 3 debido al reposo del tren de carga en el diferencial, I_3 y b_3 representan el momento de inercia y el coeficiente de fricción viscosa, τ_0 es

el par de carga en los neumáticos necesaria para desplazar al vehículo y $\frac{d\theta_3}{dt}$ es la aceleración angular en el eje 3, obteniendo la ecuación 20.

$$I_3 \frac{d^2\theta_3}{dt^2} = \tau_4 - \tau_0 - b_3 \frac{d\theta_3}{dt} \quad (20)$$

Asumiendo que el par de carga del engranaje es uniforme a lo largo de todo el tren de potencia y a partir de la relación de engranaje entre los ejes presentados se puede utilizar las relaciones de la ecuación 21.

$$\frac{\theta_n}{\theta_m} = \frac{\frac{d\theta_n}{dt}}{\frac{d\theta_m}{dt}} = \frac{N_m}{N_n} = N \quad (21)$$

Donde N_m será considerada como el engrane del eje principal y N_n será el engrane del eje secundario, de igual manera la nomenclatura se utilizare en los desplazamientos angulares θ_m y θ_n . Por otro lado, se tienen las relaciones entre los torques de cada eje presentados en las ecuaciones 22 y 23.

$$\tau_n \frac{d\theta_n}{dt} = \tau_m \frac{d\theta_m}{dt} \quad (22)$$

$$\tau_n = \tau_m \frac{N_n}{N_m} \quad (23)$$

Ahora bien, sustituyendo dichas relaciones en ecuación 20 se obtiene ecuación 24.

$$I_3 \frac{d^2\theta_3}{dt^2} = \tau_3 \frac{N_4}{N_3} - \tau_0 - b_3 \frac{d\theta_3}{dt} \quad (24)$$

Y despejando el torque de la ecuación 24 se llega a la ecuación 25.

$$\tau_3 = \frac{N_3}{N_4} I_3 \frac{d^2\theta_3}{dt^2} + \frac{N_3}{N_4} \tau_0 + \frac{N_3}{N_4} b_3 \frac{d\theta_3}{dt} \quad (25)$$

Sustituyendo la ecuación 25 en la ecuación 19 y asumiendo que $\tau_2 = \tau_1 \frac{N_2}{N_1}$ llegamos a la ecuación 26.

$$I_2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = \tau_1 \frac{N_2}{N_1} - \frac{N_3}{N_4} \left(I_3 \frac{d^2\theta_3}{dt^2} + \tau_0 + b_3 \frac{d\theta_3}{dt} \right) - b_2 \frac{d\theta_2}{dt} \quad (26)$$

Despejando el torque τ_1 se puede reescribir la ecuación 26 en la ecuación 27.

$$\tau_1 = \frac{N_1}{N_2} I_2 \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} + \frac{N_1 N_3}{N_2 N_4} I_3 \frac{d^2 \theta_3}{dt^2} + \frac{N_1 N_3}{N_2 N_4} \tau_0 + \frac{N_1 N_3}{N_2 N_4} b_3 \frac{d\theta_3}{dt} + \frac{N_1}{N_2} b_2 \frac{d\theta_2}{dt} \quad (27)$$

En la ecuación 18 se sustituye el valor obtenido para τ_1 de la ecuación 27 llegando a la ecuación 28.

$$I_1 \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} = \tau - \frac{N_1}{N_2} I_2 \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} - \frac{N_1 N_3}{N_2 N_4} I_3 \frac{d^2 \theta_3}{dt^2} - \frac{N_1 N_3}{N_2 N_4} \tau_0 - \frac{N_1 N_3}{N_2 N_4} b_3 \frac{d\theta_3}{dt} - \frac{N_1}{N_2} b_2 \frac{d\theta_2}{dt} - b_1 \frac{d\theta_1}{dt} \quad (28)$$

Y posteriormente realizando el despeje correspondiente se llega a la ecuación 29 donde se realiza el despeje del torque de control y del neumático.

$$\tau - \frac{N_1 N_3}{N_2 N_4} \tau_0 = I_1 \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} + \frac{N_1}{N_2} I_2 \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} + \frac{N_1 N_3}{N_2 N_4} I_3 \frac{d^2 \theta_3}{dt^2} + \frac{N_1 N_3}{N_2 N_4} b_3 \frac{d\theta_3}{dt} + \frac{N_1}{N_2} b_2 \frac{d\theta_2}{dt} + b_1 \frac{d\theta_1}{dt} \quad (29)$$

Reescribiendo la ecuación 21 acorde a la relación de engranes del tren de engranajes se pueden considerar las relaciones de las ecuaciones 30 y 31.

$$\theta_2 = \theta_1 \frac{N_1}{N_2} \quad (30)$$

$$\theta_3 = \theta_2 \frac{N_3}{N_4} = \theta_1 \frac{N_1 N_3}{N_2 N_4} \quad (31)$$

Aplicando las ecuaciones 30 y 31 sobre la ecuación 29 se puede reescribir como se presenta en la ecuación 32.

$$I_1 \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 I_2 \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2 I_3 \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} + b_1 \frac{d\theta_1}{dt} + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 b_2 \frac{d\theta_1}{dt} + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2 b_3 \frac{d\theta_1}{dt} = \tau - \frac{N_1 N_3}{N_2 N_4} \tau_0 \quad (32)$$

Agrupando variables de estado se puede reescribir ecuación 32 como ecuación 33.

$$\left[I_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 I_2 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2 I_3 \right] \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} + \dots \left[b_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 b_2 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2 b_3 \right] \frac{d\theta_1}{dt} = \tau - \frac{N_1 N_3}{N_2 N_4} \tau_0 \quad (33)$$

Llegando a una ecuación equivalente y contemplando que n es velocidad angular del eje de la llanta entre la velocidad angular de la flecha del motor la consideramos como $n = \frac{N_1 N_3}{N_2 N_4}$, ecuación 34.

$$I_e \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + b_e \frac{d\theta_1}{dt} + n\tau_0 = \tau \quad (34)$$

Posteriormente sustituir el valor τ_0 de la ecuación 17 en 34 se obtiene ecuación 35.

$$I_e \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + b_e \frac{d\theta_1}{dt} + n \left[Rmg(f \cos \alpha + \sin \alpha) + \frac{3}{2} mR^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{2} \rho SCxR^2 \frac{d\theta^2}{dt} + K_A R^2 \frac{d\theta}{dt} \right] = \tau \quad (35)$$

La ecuación 35 proporciona el desplazamiento del sistema de propulsión, donde τ es el par de carga mecánica del motor, I_e representa el momento de inercia equivalente del tren de propulsión completo y n es la relación de transmisión aplicada sobre el torque de salida.

3. Resultados

Utilizando la ecuación 35 del modelo propuesto para el vehículo eléctrico se tiene la ecuación y considerando que $\theta = \theta_1$ se puede reescribir en la ecuación 36.

$$I_e \frac{d^2\theta}{dt^2} + b_e \frac{d\theta}{dt} + n \left[Rmg(f \cos \alpha + \sin \alpha) + \frac{3}{2} mR^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{2} \rho SCxR^2 \frac{d\theta^2}{dt} + K_A R^2 \frac{d\theta}{dt} \right] = \tau \quad (36)$$

Y despejando $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ se obtiene la ecuación 37.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{\tau - n \left[Rmg(f \cos \alpha + \sin \alpha) + \frac{1}{2} \rho SCxR^2 \frac{d\theta^2}{dt} + K_A R^2 \frac{d\theta}{dt} \right] - b_e \frac{d\theta}{dt}}{I_e + \frac{3}{2} nmR^2} \quad (37)$$

Se observa en la ecuación 37 que no cuenta con algún término dependiente de la posición angular θ , con lo que únicamente depende de la velocidad y aceleración angular. Teniendo en cuenta lo anterior, se puede establecer las ecuaciones 38 y 39.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (38)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (39)$$

Sustituyendo las ecuaciones 38 y 39 en 37 se puede reescribir como en la ecuación 40.

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\tau - n \left[Rmg(f \cos \alpha + \sin \alpha) + \frac{1}{2} \rho SC_x R^2 \omega^2 + K_A R^2 \omega \right] - b_e \omega}{I_e + \frac{3}{2} nmR^2} \quad (40)$$

De esta manera se llega a una ecuación diferencial de primer orden en lugar de una de segundo orden, simplificando el sistema. A través de los datos recabados en la literatura en [Duran, 2014], [Rocha, 2017] se realiza una evaluación mediante simulación del sistema, los parámetros utilizados se observan en la tabla 1.

Tabla 1 Parámetros del vehículo.

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
n	1 / 5.5	S	2.66 m ²
R	0.2876 m	C_x	0.25
m	1366 kg	K_A	0.6
g	9.81 m/s ²	b_e	11.5 × 10 ⁻³ N · m · s
f	0.015	I_e	2.9148 kg · m ²
α	(0° – 20°)	τ	620 N · m
ρ	0.23		

La respuesta del sistema en lazo abierto se muestra en la figura 7, el tiempo de asentamiento es aproximado a 9 segundos, la velocidad angular del motor se estabiliza a 750 rad/s, con la relación que se presenta se puede mostrar que la velocidad angular en el neumático 1/n el valor resultante es aproximadamente 140 rad/s, haciendo la conversión al radio de las ruedas se contempla una velocidad lineal del vehículo con un ángulo de inclinación de grados aproximada de 140 km/h. El método numérico elegido para resolver el sistema de la ecuación 40 fue un Runge-Kutta de 4° orden con un paso fijo de 1 × 10⁻³, con esta simulación se obtiene la velocidad angular del sistema, debido a ser el valor de interés y recordando que la posición angular no es una variable de interés.

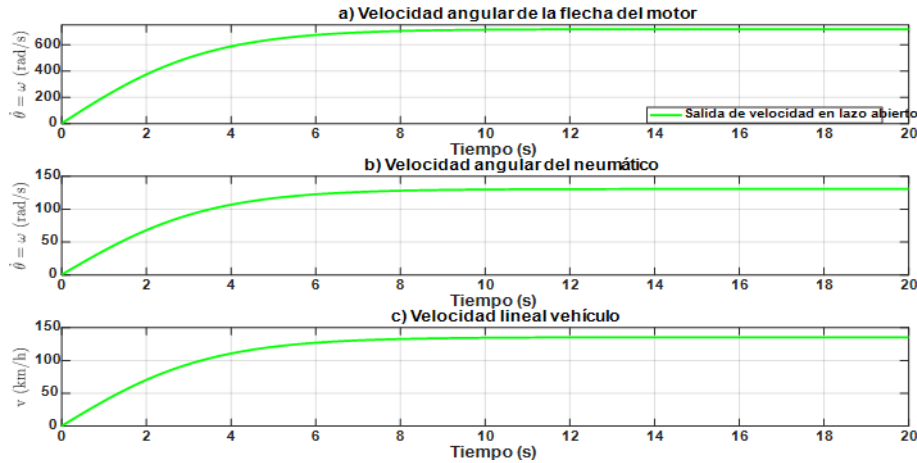


Figura 7 Respuesta del sistema en lazo abierto con $\tau = 620$ Nm.

De igual manera se realiza una prueba con un ángulo de inclinación aplicado al sistema, como valor de ángulo se llevará al extremo común de pendiente que se puede presentar en una carretera que es 20° . En la figura 8 se observa que el tiempo de asentamiento es cercano a 12 segundos, la velocidad angular del motor resultante es aproximadamente a 550 rad/s, con la relación que se presenta $1/n$ se puede mostrar que la velocidad angular en el neumático es aproximadamente 100 rad/s, haciendo la conversión multiplicando por el radio de las ruedas con valor de 0.2856 m se contempla una velocidad lineal del vehículo con un ángulo de inclinación de 20 grados aproximada de 100 km/h.

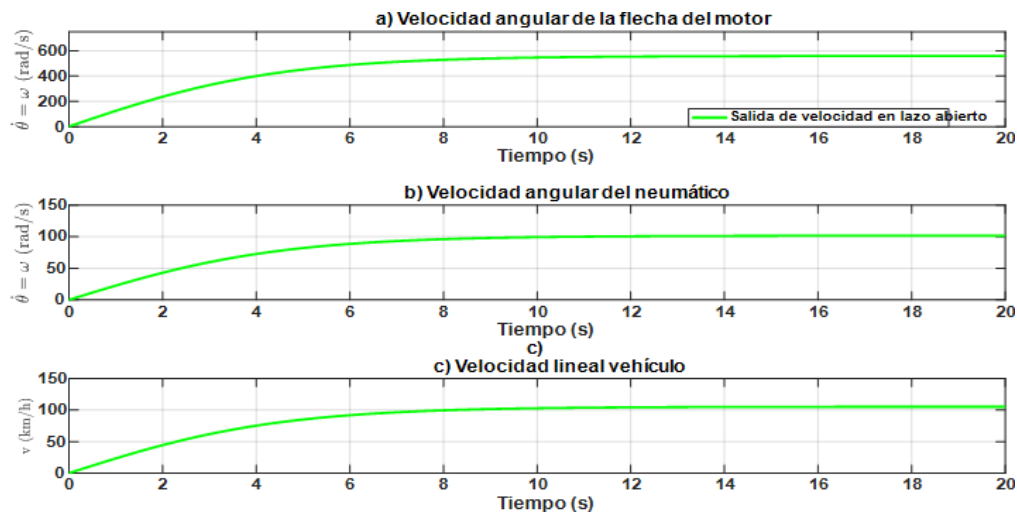


Figura 8 Respuesta del sistema en lazo abierto con ángulo de inclinación de 20° , aplicando un $\tau = 620$ Nm.

Reescribiendo el modelo matemático de la ecuación 40 para simplificar el diseño y realizar la aplicación de un control convencional para mejorar el funcionamiento del sistema a pesar de los cambios de valores en los parámetros de inclinación y valores de fuerzas externas posibles se tiene la ecuación 41.

$$\frac{d\omega}{dt} = \phi + \gamma\tau \quad (41)$$

Donde ϕ representa a los términos que no incluyen al torque τ y γ es un termino constante. Para que la velocidad angular pueda llegar a una referencia dada (ω_d) es necesario que se aplique un torque en específico, considerando la ecuación 41 la dinámica nominal se representa como en la ecuación 42.

$$\frac{d\omega_d}{dt} = \phi_d + \gamma\tau_d \quad (42)$$

Definiendo el error de velocidad angular y su derivada como en la ecuación 43.

$$\begin{aligned} e &= \omega - \omega_d \\ \frac{de}{dt} &= \frac{d\omega}{dt} - \frac{d\omega_d}{dt} \end{aligned} \quad (43)$$

Se realiza la propuesta de un controlador Proporcional-Integral (PI), ecuación 44.

$$\tau = -\frac{\beta_1}{\gamma}e - \frac{\beta_0}{\gamma} \int_0^t e dt - \frac{1}{\gamma}\phi \quad (44)$$

Sustituyendo la ecuación 44 en la ecuación 41 se obtiene la ecuación 45.

$$\frac{de}{dt} = -\beta_1 e - \beta_0 \int_0^t e dt \quad \Rightarrow \quad \frac{de}{dt} + \beta_1 e + \beta_0 \int_0^t e dt = 0 \quad (45)$$

Derivando esta ecuación una vez se obtiene la ecuación 46.

$$\frac{d^2e}{dt^2} + \beta_1 \frac{de}{dt} + \beta_0 e = 0 \quad (46)$$

Se propone la dinámica de referencia para el error mostrada en la ecuación 47.

$$\frac{d^2e}{dt^2} + 2\omega_n\zeta \frac{de}{dt} + \omega_n^2 e = 0 \quad (47)$$

Donde comparando la ecuación 47 con la desarrollada para la propuesta de control en la ecuación 46 se definen los valores para β_0 y β_1 dependientes de una frecuencia natural propuesta como la ecuación 48.

$$\beta_1 = 2\omega_n\zeta \quad \beta_0 = \omega_n^2 \quad (48)$$

Utilizados para sustituir en la ecuación 44 y obtener la variable virtual de la ecuación 47, mismo valor que se ocupara para sustituir en la ecuación 40 como entrada de control, ecuación 49.

$$\tau = -\frac{2\omega_n\zeta}{\gamma} e - \frac{\omega_n^2}{\gamma} \int_0^t e dt - \frac{1}{\gamma} \phi \quad (49)$$

Se propone los valores $\omega_n = 10$ y $\zeta = 0.8$ para el controlador, realizando pruebas en las mismas condiciones que en lazo abierto con inclinación de 20° , con respuesta de establecimiento a 1.5 s, a través de la relación $\frac{1}{n}$ para llegar a la velocidad angular del neumático y haciendo la multiplicación por el radio de este para llegar a la velocidad lineal del sistema como se muestra en la figura 9.

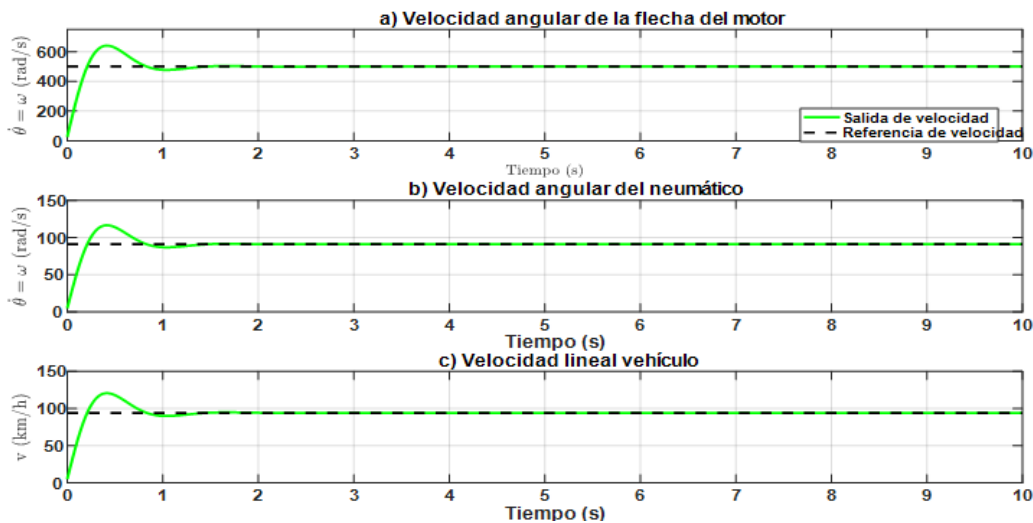


Figura 9 Respuesta a lazo de control con ángulo de inclinación de 20° .

Como se está hablando de un sistema mecánico, el proponer una referencia de velocidad como un escalón puede generar valores de torque irreales o peligrosos para el motor. Una visión más realista a este problema es que la referencia de velocidad angular (ω_d) vaya de un valor inicial (ω_{in}) y termine en un valor final (ω_f) en un intervalo de tiempo razonable. Para lo anterior se puede hacer uso de un método de interpolación, se usa una curva de Bézier expresada en la ecuación 50, que se basa en una interpolación polinomial [Beltrán, 2020], con la ecuación 51.

$$\omega_d = \begin{cases} \omega_{in}, & 0 \leq t < t_1 \\ \omega_{in} + (\omega_f - \omega_{in})\varphi, & t_1 \leq t < t_2 \\ \omega_f, & t > t_2 \end{cases} \quad (50)$$

$$\varphi = \sum_{k=1}^3 r_k \left(\frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \right)^{2+k} \quad (51)$$

Donde $\omega_{in} = 0$, $\omega_f = 200 \text{ rad/s}$, $r_1 = 10$, $r_2 = -15$, $r_3 = 6$, $t_1 = 0 \text{ s}$, $t_2 = 3 \text{ s}$.

En la figura 10 se observa la curva de Bézier de referencia generada con la ecuación 50, como es apreciable, el incremento en la referencia es de forma suave y se hace en función del tiempo.

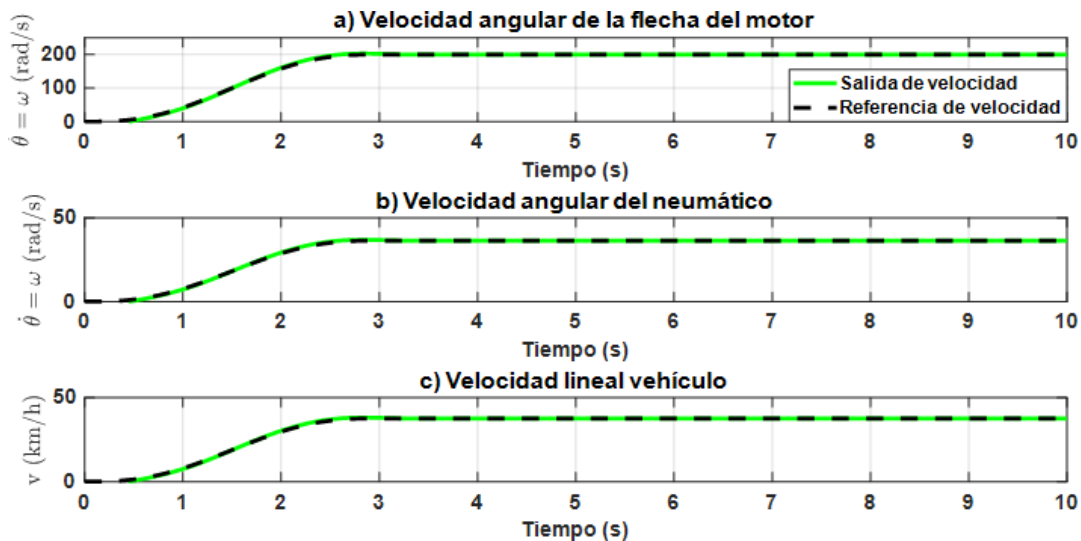


Figura 10 Respuesta del sistema a referencia de trayectoria de curva de Bézier.

4. Discusión

Este documento presenta el modelo del tren motriz completo contemplando diversas fuerzas que puedan oponerse al movimiento, en comparación con otros trabajos encontrados en la literatura donde solo se utiliza la relación entre el torque inicial y el de salida. El controlador propuesto en el vehículo eléctrico es para mejorar su funcionamiento, con el propósito de apoyar al desarrollo de tecnologías que están en auge hoy en día.

Como trabajo futuro se pretende acoplar la dinámica de un motor y diferentes técnicas de control como se muestran en [Beltran, 2019].

5. Conclusiones

En este trabajo se realizó el modelado de un vehículo eléctrico contemplando las fuerzas externas posibles que se puedan oponer al avance del mismo, evaluando el sistema en lazo abierto y en lazo cerrado con una técnica de control de velocidad. Se utilizó un controlador PI aplicado al torque para regular la velocidad y se usa como referencia una función escalón, la cual genera valores de torque irreales o peligrosos para el motor, para ello, una visión más realista es proponer un perfil de referencia utilizando una curva de Bézier.

En los resultados alcanzados se observa el comportamiento adecuado del sistema al ser modelado con los valores sugeridos en las referencias consultadas, generando así una plataforma para simular adecuada para pruebas con diferentes técnicas de control, ya que presentó buena respuesta al aplicar un controlador convencional PI. Como trabajo futuro se propone mejorar la plataforma incorporando la dinámica del motor y la dinámica de un inversor para un vehículo eléctrico y poder aplicar técnicas de control robusto con respecto al torque de carga.

6. Bibliografía y Referencias

- [1] Andreescu, Cristian, and Adrian Clenci, eds. *Proceedings of the European Automotive Congress EAEC-ESFA 2015*. Springer, 2015. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-27276-4>.
- [2] Beltran Carbajal F, Favela Contreras A, Hernandez Avila JL, Olvera Tapia O, Sotelo D, Sotelo C. Dynamic output feedback control for desired motion tracking on synchronous motors. *Int Trans Electr Energ Syst*. 2020. <https://doi.org/10.1002/2050-7038.12260>.
- [3] Beltran Carbajal F, Tapia Olvera R, Lopez Garcia. *Extended PI Feedback Tracking Control for Synchronous Motors*. 2019. <https://doi.org/10.1007/s12555-018-0312-6>.
- [4] Bhatt P., Mehar H. & Sahajwani M. *Electrical Motors for Electric Vehicle A Comparative Study*. 2020. <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3364887>.
- [5] Chan C. *The State of the Art of Electric and Hybrid Vehicles*. 2020. <http://dx.doi.org/10.1109/5.989873>.

- [6] Davide Tavernini, Mathias Metzler, Patrick Gruber & Sorniotti. Explicit Nonlinear Model Predictive Control for Electric Vehicle Traction Control. 2019. <http://dx.doi.org/10.1109/TCST.2018.2837097>.
- [7] Durán M., Aguilera J., Guerrero R., Claudio A., Vela L. & Gudiño-Lau J. Modelado del Sistema de Tracción para un Vehículo Eléctrico, Asociación de México de Control Automático. 2014. <http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07642014000600013>.
- [8] García C., Masera O., Riegelhaupt E. Escenarios de bioenergía en México: Potencial de sustitución de combustibles fósiles y mitigación de GEI. *Revista Mexicana de Física*, vol. 59, no 2, p. 93-103, 2013.
- [9] Vacheva Gergana, Hinov Nikolay, Gilev Bogdan. Innovative Methods for Control of Electric Vehicles. *TEM Journal*, 2020, vol. 9, no 1, p. 14-18.
- [10] Haddoun A, Benbouzid M, Diallo D, Abdessemed R, Ghouili J & Srairi K. A Loss-Minimization DTC Scheme for EV Induction Motors. 2007. <http://dx.doi.org/10.1109/TVT.2006.889562>.
- [11] Maila, J. E. G., Cisneros, V. A. G., Nogales, S. J. C., & Jaramillo, W. A. C. (2021). Caracterización de las fuerzas del vehículo eléctrico visto desde su dinámica para su optimización. *Polo del Conocimiento: Revista científico-profesional*, 919-941. ISSN-e2550-682X.
- [12] Lin Z, Dong J & Greene DL. Hydrogen Vehicles: Impacts of DOE Technical Targets on Market Acceptance and Societal Benefits. 2013.
- [13] Rocha Hoyos, Tipanluisa LE, Reina SW & Ayabaca CR. Evaluación del Sistema de Tracción en un Vehículo Eléctrico Biplaza de Estructura Tubular. 2017. <http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07642017000200004>.
- [14] Ruis, Juan F. Dols. El Futuro del vehículo ¿eléctrico?. *Securitas Vialis*. 2012. <https://doi.org/10.1007/s12615-012-9046-z>.
- [15] Winterhalter CR. Field Oriented Control of a Single Inverter, Dual, Parallel Induction Machine Traction Drive for Electric Vehicles. 1997.