

MODELO PROBABILÍSTICO POISSON-BETA: CARACTERÍSTICAS POR SIMULACIONES GRÁFICAS

POISSON-BETA PROBABILISTIC MODEL: CHARACTERISTICS BY GRAPHIC SIMULATIONS

Francisco Alberto Hernández de la Rosa

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, México
francisco.hernandez@ujat.mx

María Teresa Fernández Mena

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, México
teresa.fernandez@ujat.mx

Ana Laura Fernández Mena

Tecnológico Nacional de México / IT de Villahermosa, México
ana.fm@villahermosa.tecnm.mx

Manuel Antonio Rodríguez Magaña

Tecnológico Nacional de México / IT de Villahermosa, México
manuel.rm@villahermosa.tecnm.mx

Recepción: 2/noviembre/2020

Aceptación: 29/junio/2021

Resumen

Los métodos estadísticos para datos de conteo realizan búsquedas de modelos probabilistas con la característica de sobredispersión ($\sigma^2 > \mu$) en fenómenos aleatorios. Es de interés analizar los modelos compuestos de Poisson, en particular, la distribución de probabilidad Poisson-Beta relacionado con la función hipergeométrica confluyente. El presente estudio tiene como objetivo describir el comportamiento de la curva de la distribución Poisson-Beta de tres parámetros mediante el software R Project. Este estudio se realizó con un enfoque cuantitativo y de alcance descriptivo que consistió en una serie de códigos en R para la simulación de curvas de probabilidad acumulada y los cálculos: mediana y curtosis. Conclusiones: Se observaron, cuando α -fija y β -aumenta, que las curvas sigmoidales se desplazaron hacia la izquierda, hacia arriba y aumentó la curtosis. Cuando β -fija y α -aumenta, las curvas se desplazan hacia la derecha, hacia abajo y disminuyó la curtosis.

Palabras Clave: Datos de conteo, distribución Poisson-Beta, scModels, sobredispersión, curvas sigmoidales.

Abstract

Statistical methods for counting data search for probabilistic models with the characteristic of over-dispersion ($\sigma^2 > \mu$) in random phenomena. It is of interest to analyze the Poisson compound models, in particular, the Poisson-Beta probability distribution related to the confluent hypergeometric function. The present study aims to describe the behavior of the three-parameter Poisson-Beta distribution curve using the R Project software. This study was carried out with a quantitative and descriptive approach that consisted of a series of codes in R for the simulation of cumulative probability curves and the calculations: median and kurtosis. Conclusions: When α -fixed and β -increased, it was observed that the sigmoidal curves shifted to the left, upwards and the kurtosis increased. When β -fixed and α -increased, the curves shifted to the right, downward and the kurtosis decreased.

Keywords: count data, Poisson-Beta distribution, scModels, over-dispersion, sigmoidal curves.

1. Introducción

El análisis estadístico de variable aleatoria de conteo o de recuento sigue creciendo el interés por los investigadores por la búsqueda del mejor modelo probabilista para fenómenos aleatorios que presentan sobredispersión. Entre las áreas más comunes en las cuales se han aplicado el modelaje de variable de conteo son:

- Salud pública, el número de asistencia a consulta externa con el médico asignado, el número de días internado en el hospital por el paciente, el número de fármacos prescritos, o el número de visitas a los servicios de emergencia [Salinas-Rodríguez, Manrique-Espinoza & Sosa-Rubí, 2009].
- Ciencia actuarial, el número de reclamaciones a pólizas de seguro a causa de muertes o accidentes de automóvil [Gómez-Déniz, Sarabia & Prieto, 2009].

- Educación, el número de ausencias en colegios por un periodo de tiempo, el recuento de casos de acoso escolar o el número de errores ortográficos presente en un examen escrito por los estudiantes [Hilbe, 2017].
- Transporte e Ingeniería de tránsito, los datos de conteos vehiculares en un puente de cuota o el número de pelotones de los vehículos circulantes [Moreno-Quintero & Nieves-Cruz, 2019].
- Finanzas, el número de clientes embargados por incumplimiento de pago hipotecario en diferentes entidades bancarias o la frecuencia de quiebra de una institución financiera durante un periodo de tiempo [Cameron & Trivedi, 1998], entre otros.

Lindsey (1995) define un dato de recuento como el número de eventos o sucesos que ocurren en una misma unidad de observación en un intervalo espacial o temporal definido. En la literatura estadística se menciona al modelo de regresión de Poisson como una herramienta para analizar variables de conteo ya que presenta la bondad de capturar la naturaleza discreta (no negativa) de los datos de recuento que proceden de eventos raros, y cumplen con el supuesto equidispersión, esto consiste cuando los parámetros media y varianza son iguales. Cuando no se cumplen con el supuesto mencionado ya sea por infradispersión o por sobredispersión, se utilizan otros modelos estadísticos tales como: regresión binomial negativa, modelos de clase latente o modelos de ecuaciones estructurales [Salinas-Rodríguez, Manrique-Espinoza & Sosa-Rubí, 2009], así como también, existen una amplia variedad de modelos compuestos de Poisson (también denominados mixturas de Poisson), por mencionar algunos, Poisson-Beta, Poisson Beta truncada tipo 2, Poisson-Beta de cuatro o cinco parámetros [Vu, Wills, Kalari, Niu, Wang, Rantalainen & Pawitan, 2016], Poisson Lindley-Beta prime [Gómez-Déniz, Hernández-Bastida & Fernández-Sánchez, 2016], y recientemente la distribución la Poisson-Beta Exponencial [Mahmoudiy, Zamaniz & Meshkat, 2018]. En una revisión somera en el motor de búsqueda del sitio web ScienceDirect se observó que existen muy pocos artículos científicos referente a la distribución de probabilidad de Poisson-Beta en ámbitos de investigación aplicada y de estadística educativa. Se puede conjeturar que lo anterior se debe a las siguientes causas:

- La complejidad de la función hipergeométrica confluyente ya que para obtener los valores de esta función se requiere cómputo avanzado.
- La vulnerabilidad de los algoritmos de cómputo con respecto a la robustez la función hipergeométrica confluyente en ciertas regiones de los parámetros de la función.
- La complejidad para calcular los estimadores de máxima verosimilitud. Por lo anterior, el propósito de este trabajo es coadyuvar en el análisis estadístico de conteo para resolver la ausencia de conocimiento sobre algún modelo probabilístico con la propiedad de sobredispersión, en nuestro caso, se logra mostrando algunas características gráficas de la Poisson-Beta, es decir, estas características permitirán generar un conocimiento sobre qué tendencia de la curva se produce en diferentes condiciones de los tres parámetros. Por otro lado, se sabe que uno de los objetivos de los investigadores es construir modelos de distribuciones de probabilidad potenciales que representen el comportamiento teórico de diferentes fenómenos aleatorios de la naturaleza. El propósito de modelar lo observable es sin duda un requerimiento importante para el investigador empírico, ya que con estos modelos se pueden experimentar en diferentes escenarios paramétricos en donde la realidad no es viable.

El presente estudio tiene como objetivo describir el comportamiento de las curvas de la distribución de probabilidad Poisson-Beta de tres parámetros mediante el software R Project.

2. Métodos

El estudio de investigación se realizó con un enfoque cuantitativo y de alcance descriptivo que permitió determinar las características numéricas y gráficas de la función de distribución para una variable aleatoria compuesta Poisson-Beta.

Definición. Una variable aleatoria X sigue una distribución compuesta de Poisson si la función de masa de probabilidad está dada por la ecuación 1. La función $g_{\lambda}(\lambda)$ es la densidad de probabilidad para $\lambda > 0$ [Karlis & Xekalaki, 2005].

$$P(X = x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} g_{\lambda}(\lambda) d\lambda, \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Definición. Una variable aleatoria X sigue una distribución de Poisson-Beta, denotada por $X \sim PB(\alpha, \beta, \varphi)$, si X tiene una distribución compuesta de Poisson dada por la ecuación 2.

$$X|\theta \sim \wp(\varphi\theta) \text{ y } \theta \sim Be(\alpha, \beta) \quad (2)$$

El símbolo $\wp(\varphi\theta)$ representa una distribución de Poisson con media $\varphi\theta$, $\varphi > 0$, $0 < \theta < 1$ y $Be(\alpha, \beta)$ representa una distribución Beta con parámetros $\alpha > 0, \beta > 0$. Esta distribución compuesta se desarrolló en 1965 por Holla y Bhattacharya [Dodge, 2003]. Gómez-Déniz, Sarabia & Prieto (2009) mencionan que la función de masa de probabilidad de una variable aleatoria X que sigue la distribución Poisson-Beta está dada por la ecuación 3.

$$P(X = x|\alpha, \beta, \varphi) = \frac{\varphi^x \Gamma(\alpha + \beta) \Gamma(\alpha + x)}{x! \Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha + \beta + x)} {}_1F_1(\alpha + x; \alpha + \beta + x; -\varphi) \quad (3)$$

El espacio de valores para la variable X es $x = 0, 1, 2, \dots$ y ${}_1F_1$ es la función hipergeométrica confluyente de primera clase [Amrhein, Harsha & Fuchs, 2019a] dada por la ecuación 4.

$${}_1F_1(a; b; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n z^n}{(b)_n n!} \quad (4)$$

El símbolo de Pochhammer, $(a)_n$, está dado por la ecuación 5.

$$(a)_k = a(a + 1)(a + 2) \cdots (a + k - 1) = \frac{\Gamma(a + k)}{\Gamma(a)} \quad (5)$$

La función gamma se representa por $\Gamma(a)$ y por definición $(a)_0 = 1$.

Gómez-Déniz, Sarabia & Prieto (2009) demostraron que la media y la varianza para una variable aleatoria Poisson-Beta están dadas por la ecuación 6, respectivamente,

$$E(X) = \frac{\alpha\varphi}{\alpha + \beta} \quad \text{y} \quad V(X) = \frac{\alpha\varphi}{\alpha + \beta} + \frac{\alpha\beta\varphi^2}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} \quad (6)$$

La metodología desarrollada consiste en los siguientes puntos:

- Se enuncia la función de distribución acumulativa para la variable aleatoria de conteo compuesta Poisson-Beta, la cual está dada por la ecuación 7:

$$F(x; \alpha, \beta, \varphi) = P(X \leq x) = \sum_{i: i \leq x} P(X = i | \alpha, \beta, \varphi) \quad (7)$$

- Para cualquier $x \in \mathbb{R}$, $F(x; \alpha, \beta, \varphi)$ representa la probabilidad acumulada para todos los valores menores o iguales a x , y esta función de distribución nos permite estudiar el comportamiento probabilístico de la variable aleatoria X al variar los valores de los tres parámetros.
- En la problemática de búsqueda de una distribución de probabilidad potencial que se ajuste a los datos experimentales es usual realizar tanto la estimación de los parámetros como el análisis gráfico del comportamiento de la curva de distribución de probabilidad, que se produce con los rangos de valores de estos parámetros; ya que éstos determinan la localización (φ), la forma (α) y la escala (β) de la curva. Así que, se diseña un esquema de selección que combine los diferentes valores de α , β y φ , de acuerdo a: 1) α y β son múltiplos de 4, 2) φ múltiplo de 7 y 3) se crea una red de puntos discretos (α, β) , en forma cuadrangular en el plano parametral con ejes α y β ; y esta red se desplaza a lo largo del eje parametral φ . De acuerdo al diseño de la tabla 1, se analiza por simulación el comportamiento de la curva de la función de distribución $F(x; \alpha, \beta, \varphi)$.

Tabla 1 Diseño para la simulación gráfica.

Serie 1	Serie 2	Serie 3	Diseño
$\varphi = 14$	$\alpha = 12$	$\beta = 4, 8, 12, 16, 20$	I
	$\beta = 12$	$\alpha = 4, 8, 12, 16, 20$	II
$\varphi = 21$	$\alpha = 12$	$\beta = 4, 8, 12, 16, 20$	III
	$\beta = 12$	$\alpha = 4, 8, 12, 16, 20$	IV

- Se elaboran códigos de programación (script 1) en R Project [R Core Team, 2018] para la simulación gráfica de la curva de distribución de acuerdo con los diferentes valores en los parámetros establecidos en la tabla 1. Para esto, se utiliza la librería *scModels*, la cual es una colección de funciones que tiene

como finalidad ajustar modelos de distribución discreta para datos de conteo. Esta librería incluye las siguientes funciones computacionales:

- ✓ Distribuciones tales como: Poisson, binomial negativa y Poisson-Beta.
- ✓ Implementación de la función hipergeométrica confluyente de Kummer.
- ✓ Estimación de parámetros por máxima verosimilitud. Con respecto a la distribución Poisson-Beta, el parámetro correspondiente a la distribución de Poisson se considera que sigue una distribución beta en el espacio $(0, c)$ donde c es un parámetro de escala numérico; cuando $c = 1$ se reduce a la beta clásica [Amrhein, Harsha & Fuchs, 2019b y Rdr.io, 2019]. En la tabla 2 se muestra las funciones en R utilizadas en la simulación para el análisis de las características probabilísticas de la Poisson-Beta.

Tabla 2 Funciones de R utilizadas en el análisis de la distribución de Poisson-Beta.

Función	Sintaxis	Argumento
Probabilidad	$dpb(x, \alpha, \beta, c)$	x -vector de observaciones
Distribución acumulada	$ppb(q, \alpha, \beta, c)$	q -vector de cuantiles
Cuantiles	$qpb(p, \alpha, \beta, c)$	p -vector de probabilidades
Aleatorios	$rpb(n, \alpha, \beta, c)$	n número de observaciones

- Se elaboran códigos de programación (script 2) para el cálculo de la mediana en cada curva de distribución simulada por R Project. Se propone el cálculo de la mediana ya que este valor representa la zona central de la distribución de probabilidad y además el comportamiento del valor de la mediana será un indicador comparativo entre las diferentes curvas. Para esto se utiliza la función de cuantiles, qpb , establecido en la tabla 2.
- Se elaboran códigos de programación (script 3) para determinar el valor de la función de distribución, $F(x; \alpha, \beta, \varphi)$, cuando se evalúa en el valor x tal que x es el valor de la mediana proveniente de la función de distribución $F(x; \alpha = 12, \beta = 12, \varphi)$ para cada valor $\varphi = 14$ y 21 .
- Se elaboran códigos de programación (script 4) para el cálculo de la curtosis para cada curva de distribución simulada por R Project. Para esto, se utiliza la librería *moments* y el método de Monte Carlo para la simulación 100,000

valores de la variable Poisson-Beta. El comportamiento de la curtosis es otro indicador comparativo sobre el comportamiento de la curva.

3. Resultados

Simulación gráfica de la distribución Poisson-Beta

A continuación, se muestran los resultados obtenidos por las cuatro corridas del script 1 en R Project generando una serie de gráficas de las curvas función de distribución con las diferentes combinaciones de valores para los tres parámetros establecidos por la tabla 1. En la figura 1 se muestran cuatro curvas con los parámetros $\varphi = 14$, $\alpha = 12$ fijos y variando al parámetro β con valores de acuerdo a los cinco primeros múltiplos de 4.

En la figura 2 se muestran cuatro curvas con los parámetros $\varphi = 14$, $\beta = 12$ fijos y variando al parámetro α de acuerdo con los cinco primeros múltiplos de 4.

En la figura 3 se muestran cuatro curvas con los parámetros $\varphi = 21$, $\alpha = 12$ fijos y variando al parámetro β con valores de acuerdo con los cinco primeros múltiplos de 4.

En la figura 4 se muestran cuatro curvas con los parámetros $\varphi = 14$, $\beta = 12$ fijos y variando al parámetro α con valores de acuerdo con los cinco primeros múltiplos de 4.

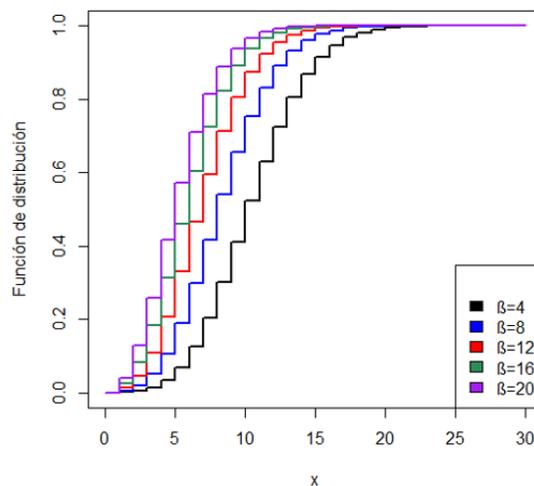


Figura 1 Distribución Poisson-Beta obtenida por R con $\varphi = 14$ y $\alpha = 12$.

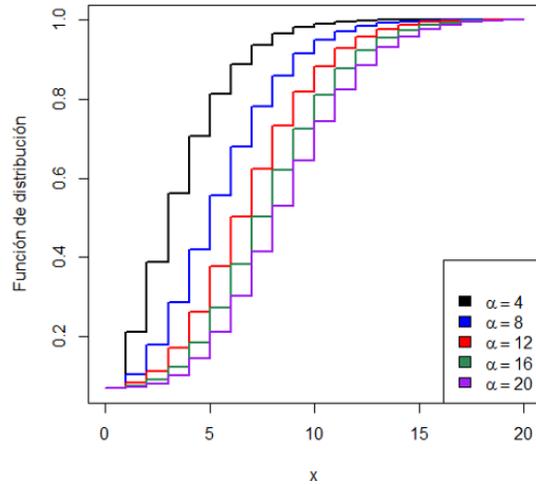


Figura 2 Distribución Poisson-Beta obtenida por R con $\varphi = 14$ y $\beta = 12$.

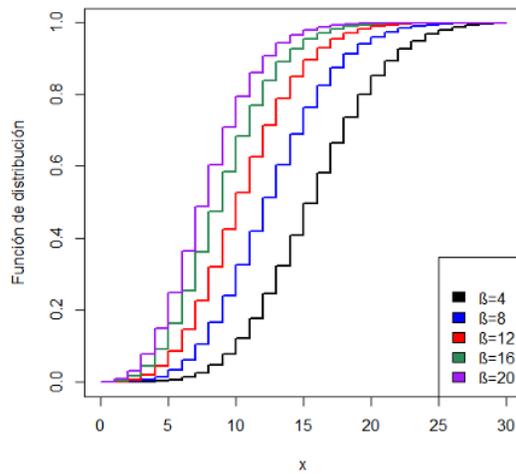


Figura 3 Distribución Poisson-Beta obtenida por R con $\varphi = 21$ y $\alpha = 12$.

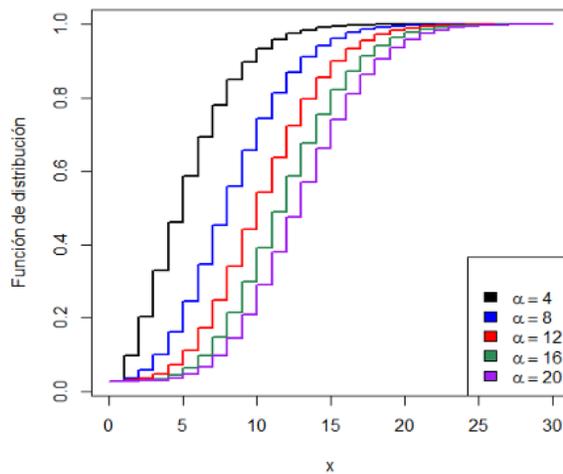


Figura 4 Distribución Poisson-Beta obtenida por R con $\varphi = 14$ y $\beta = 12$.

Algunas características probabilísticas de $F(x; \alpha, \beta, \varphi)$

A continuación, se muestran los resultados de las características probabilísticas de la distribución Poisson-Beta tales como: mediana, probabilidad y curtosis, obtenidos por las corridas de los scripts 2, 3 y 4 implementados en R Project bajo la estructura de los cuatros diseños. En las tablas 3 y 4, en la segunda columna, aparecen los valores de las diferentes medianas calculadas de acuerdo a la serie de valores ascendente del parámetro variante (α o β); y cuando $\varphi = 14$, $\alpha = \beta = 12$ la mediana obtenida, $med = 7$, se considera como un valor referente en las comparaciones posteriores de las curvas en los diseños I y II. En la tercera columna, aparecen los valores de la función de distribución evaluada en $med = 7$. En la última columna, están las distintas curtosis de acuerdo al parámetro variante.

Tabla 3 Diseño I: Características estimadas para $F(x; \alpha = 12, \beta, \varphi = 14)$.

Parámetro variante	Mediana	Función de distribución	Curtosis
β_i	$x_i = F_{\beta_i}^{-1}(0.50)$	$F_{\beta_i}(7; \alpha = 12, \beta = \beta_i, \varphi = 14)$	k_{β_i}
$\beta_1 = 4$	10	0.1263	3.0989
$\beta_2 = 8$	8	0.2974	3.1538
$\beta_3 = 12$	7	0.4658	3.1890
$\beta_4 = 16$	6	0.6050	3.2853
$\beta_5 = 20$	5	0.7112	3.3875

Tabla 4 Diseño II: Características estimadas $F(x; \alpha, \beta = 12, \varphi = 14)$.

Parámetro variante	Mediana	Función de distribución	Curtosis
α_i	$x_i = F_{\alpha_i}^{-1}(0.50)$	$F_{\alpha_i}(7; \alpha = \alpha_i, \beta = 12, \varphi = 14)$	k_{α_i}
$\alpha_1 = 4$	3	0.8880	3.8374
$\alpha_2 = 8$	5	0.6584	3.4458
$\alpha_3 = 12$	7	0.4658	3.1930
$\alpha_4 = 16$	8	0.3355	3.1924
$\alpha_5 = 20$	9	0.2507	3.1465

En las tablas 5 y 6 se construyeron en forma análoga a las tablas 3 y 4; en la tercera columna se presentan los valores de la función de distribución evaluada en $med = 10$, este valor representa la mediana obtenida cuando $\alpha = \beta = 12$ y $\varphi = 21$ y se considera como un valor referente en las comparaciones posteriores de las curvas en los diseños III y IV.

Tabla 5 Diseño III: Características estimadas $F(x; \alpha = 12, \beta, \varphi = 21)$.

Parámetro variante	Mediana	Función de distribución	Curtosis
β_i	$x_i = F_{\beta_i}^{-1}(0.50)$	$F_{\beta_i}(10; \alpha = 12, \beta = \beta_i, \varphi = 21)$	k_{β_i}
$\beta_1 = 4$	16	0.0772	3.0569
$\beta_2 = 8$	12	0.2396	3.0856
$\beta_3 = 12$	10	0.4242	3.1818
$\beta_4 = 16$	9	0.5854	3.2609
$\beta_5 = 20$	8	0.7095	3.2978

Tabla 6 Diseño IV: Características estimadas $F(x; \alpha, \beta = 12, \varphi = 21)$.

Parámetro variante	Mediana	Función de distribución	Curtosis
α_i	$x_i = F_{\alpha_i}^{-1}(0.50)$	$F_{\alpha_i}(10; \alpha = \alpha_i, \beta = 12, \varphi = 21)$	k_{α_i}
$\alpha_1 = 4$	5	0.8981	3.7562
$\alpha_2 = 8$	8	0.6468	3.3665
$\alpha_3 = 12$	10	0.4242	3.1529
$\alpha_4 = 16$	12	0.2772	3.1177
$\alpha_5 = 20$	13	0.1870	3.0805

4. Discusión

Se analiza el comportamiento de la curva de la función de distribución Poisson-Beta para conocer las tendencias o patrones en los cuatro diseños de simulación establecidos en la tabla 1.

En el diseño I, cuando β crece, se observa que la curva sigmoideal se desplaza hacia la izquierda sobre el eje X ya que el valor de la mediana se acerca al origen (tabla 3). En el eje Y , la curva sigmoideal se desplaza hacia la cota superior $y = 1$, esto se ilustra en la figura 1 cuando se evalúa la función de distribución, $F_{\beta_i}(x; \alpha = 12, \beta = \beta_i, \varphi = 14)$, en el valor de la mediana, $x = 7$. Así que, $F_{\beta_i}(7) \rightarrow 1$ y la curtosis, k_{β_i} , aumenta, esto significa que la frecuencia de la observación $x = 0$ se incrementa, así como también en la zona central de la distribución cada vez aumenta su concentración de datos (menor dispersión) alrededor de la media, lo cual indica que en sus colas hay menos casos acumulados que en las colas de una distribución normal.

En el diseño II, cuando α crece, se observa que la curva sigmoideal se desplaza hacia la derecha sobre el eje X ya que el valor de la mediana se aleja del origen (tabla 4).

En el eje Y , la curva sigmoideal se desplaza alejándose de la cota superior $y = 1$, esto se ilustra en la figura 2 cuando se evalúa la función de distribución, $F_{\alpha_i}(x; \alpha = \alpha_i, \beta = 12, \varphi = 14)$, en el valor de la mediana, $x = 7$. Así que, $F_{\alpha_i}(7) \rightarrow 0$ y la curtosis, k_{β_i} , disminuye, esto significa que disminuye la frecuencia de la observación $x = 0$, y además en la zona central de la distribución cada vez disminuye su concentración de datos (mayor dispersión) alrededor de la media, lo cual indica que en sus colas hay más casos acumulados que en las colas de una distribución normal.

En el diseño III, de manera análoga al diseño I, cuando β aumenta, se observa que la curva sigmoideal se desplaza tanto hacia la izquierda como hacia la cota superior $y = 1$ (tabla 5), esto se ilustra en la figura 3 cuando se evalúa la función de distribución, $F_{\beta_i}(x; \alpha = 12, \beta = \beta_i, \varphi = 21)$, en el valor de la mediana, $x = 10$. Así que $F_{\beta_i}(10) \rightarrow 1$ y la curtosis, k_{β_i} , aumenta independientemente del parámetro φ . Por otro lado, en forma cualitativa la rapidez del desplazamiento es de moderada a lenta cuando $\beta > \alpha$.

En el diseño IV, de manera análoga al diseño II, cuando α crece, se observa que la curva sigmoideal se desplaza hacia la derecha y alejándose de la cota superior $y = 1$, esto se ilustra en la figura 4 cuando se evalúa la función de distribución, $F_{\alpha_i}(x; \alpha = \alpha_i, \beta = 12, \varphi = 21)$, en el valor de la mediana, $x = 10$. Así que, $F_{\alpha_i}(10) \rightarrow 0$ y la curtosis, k_{β_i} , disminuye independientemente del parámetro φ . Por otro lado, en forma cualitativa la rapidez del desplazamiento es de moderada a lenta cuando $\alpha > \beta$.

5. Conclusiones

En los diseños de simulación I y III se observan que las curvas sigmoideales se desplazan en forma horizontal hacia la izquierda y en forma vertical hacia arriba, cuando el valor de α se fija y el parámetro β aumenta. Además, se observa un incremento moderado en el apuntamiento (curtosis) de la curva implicando una mayor concentración de datos alrededor de la media, y esta concentración se acerca cada vez alrededor del valor de la variable 0.

En forma análoga, en los diseños II y IV, se observan que las curvas sigmoidales se desplazan en forma horizontal hacia la derecha y en forma vertical hacia abajo, cuando el valor de β se fija y el parámetro α aumenta. Además, se percibe que disminuye el apuntamiento (curtosis) de la curva implicando una disminución de la concentración de datos alrededor de la media, y esta concentración se aleja del valor de la variable 0.

En los cuatros diseños se observa que la distribución Poisson-Beta es de la forma leptocúrtica debido a la alta concentración de los datos alrededor de la media. En el caso particular cuando $\alpha = \beta$, la curva de la distribución se desplaza a la derecha conforme el valor de φ aumenta.

Este trabajo tiene como limitación no haber simulado curvas para distintas parejas (α, β) fijas y φ variante con la finalidad de conocer el comportamiento de la probabilidad acumulada.

6. Bibliografía y Referencias

- [1] Amrhein, L., Harsha, K. & Fuchs, C. (2019a). A mechanistic model for the negative binomial distribution of single-cell mRNA counts. BioRxiv, the preprint server for biology: <https://www.biorxiv.org/content/10.1101/657619v2>,
- [2] Amrhein, L., Harsha, K. & Fuchs, C. (2019b). Fitting discrete distribution models to count data: scModels. R package version 1.0.1. <https://CRAN.R-project.org/package=scModels>
- [3] Cameron, A.C. & Trivedi, P.K. (1998). Regression Analysis of Count Data. UK: Cambridge University Press.
- [4] Dodge, Y. (2003). The Oxford Dictionary of Statistical Terms. New York: Oxford University Press.
- [5] Gómez-Déniz, E., Sarabia, J. M. & Prieto, F. (2009). La distribución poisson-beta: aplicaciones y propiedades en la teoría del riesgo colectivo. Revista Anales del Instituto de Actuarios Españoles, Tercera Época, 15: 141-160.: <https://www.actuarios.org/publicaciones/revista-anales/anales-2009/>.

- [6] Gómez-Déniz, E., Hernández-Bastida, A. & Fernández-Sánchez, M. P. (2016). A suitable discrete distribution for modelling automobile claim frequencies. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 39: 633-647.
- [7] Hilbe, J. M. (2017). The statistical analysis of count data. *Culture y Education*, 29(3): 409-460.
- [8] Karlis, D. & Xekalaki, E. (2005). Mixed Poisson Distributions. *International Statistical Review*, 73(1): 35–58.
- [9] Lindsey, J. K. (1995). *Modelling frequency and count data*. New York: Oxford University Press Inc.
- [10] Mahmoudiy, E., Zamaniz, H. & Meshkat, R. (2018). Poisson-Beta exponential distribution: Properties and applications. *Journal Statistical Research of Iran*, 15: 119–146.
- [11] Moreno-Quintero, E. & Nieves-Cruz, V. (2019). Modelos de probabilidad en transporte e ingeniería: usos comunes y ajuste de datos. *Publicación Técnica No. 545*, Querétaro, México: Instituto Mexicano del Transporte: <https://imt.mx/archivos/Publicaciones/PublicacionTecnica/pt545.pdf>.
- [12] R Core Team (2018). *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria: <https://www.R-project.org/>.
- [13] Rdr.io. (2019). API for scModels: Fitting Discrete Distribution Models to Count Data: <https://rdr.io/cran/scModels/api/>.
- [14] Salinas-Rodríguez, A., Manrique-Espinoza, B., & Sosa-Rubí, S. G. (2009). Análisis estadístico para datos de conteo: aplicaciones para el uso de los servicios de salud. *Salud Pública México*, 51: 397-406.
- [15] Vu, T., Wills, Q., Kalari, K., Niu, N., Wang, L., Rantalainen, M. & Pawitan, Y. (2016). Modelo Beta-Poisson para análisis de datos de secuencia de ARN de una sola célula. *Bioinformatics*, 32(14): 2128–2135.