

# PRUEBA DE RAZÓN DE PROBABILIDAD SECUENCIAL (PRPS) APLICADA AL PROCESO INFERENCIA ESTADÍSTICA EN TAREAS DE MUESTREO DE ACEPTACIÓN

## SEQUENTIAL PROBABILITY RATIO TEST (SPRT) APPLIED TO THE STATISTICAL INFERENCE PROCESS IN ACCEPTANCE SAMPLING TASKS

**Pedro Enrique Arcos Arellano**

Tecnológico Nacional de México / IT de Celaya, México  
*arcos.arellano95@gmail.com*

**Manuel Darío Hernández Ripalda**

Tecnológico Nacional de México / IT de Celaya, México  
*dario.hernandez@itcelaya.edu.mx*

**Recepción:** 26/noviembre/2019

**Aceptación:** 7/octubre/2020

### Resumen

La prueba de relación de probabilidad secuencial es una forma de inferencia estadística con algunas características muy relevantes para distintas áreas. El principal beneficio del método es la reducción de muestras necesarias para emitir un veredicto, además de definir los parámetros de precisión de la prueba dentro de la prueba misma, tanto el error tipo I ( $\alpha$ ) como el error tipo II ( $\beta$ ). Para el control de calidad en industrias, la mayoría de los procesos de testeo se llevan a cabo a través de métodos clásicos donde el tamaño de muestra está predefinido y en ocasiones la precisión de estas pruebas no es clara. Este trabajo busca mostrar su uso práctico, así como evidenciar sus beneficios.

**Palabras Clave:** Error tipo I y II, inferencia estadística, muestreo de aceptación, prueba de razón de probabilidad secuencial, tamaño de muestra.

### Abstract

The sequential probability relationship test is a form of statistical inference with some very relevant characteristics for different areas. The main benefit of the method

is the reduction of samples necessary to issue a verdict, in addition to defining the precision parameters of the test within the test itself, both type I error ( $\alpha$ ) and type II error ( $\beta$ ). For quality control in industries, most of the testing processes are carried out through classic methods where the sample size is predefined and sometimes the precision of these tests is not clear. This work seeks to show its practical use, as well as to demonstrate its benefits.

**Keywords:** Acceptance sampling, sample size, sequential probability ratio test, statistical inference, type I and II error.

## 1. Introducción

La prueba de relación de probabilidad secuencial es una forma de inferencia estadística con algunas características muy relevantes para distintas áreas. Como se mencionó anteriormente, el principal beneficio del método es la reducción de muestras necesarias para emitir un veredicto. Para el control de calidad en industrias, la mayoría de los procesos de testeo se llevan a cabo a través de métodos clásicos donde el tamaño de muestra está predefinido y en ocasiones la precisión de estas pruebas no es clara. Dadas sus cualidades, el método es usado en medicina para sortear las dificultades de estudiar enfermedades raras que aquejan a muy pocos pacientes [Sebastino, Elie, Thi Viet Ha, & Jacqz-Aigran, 2018], en farmacología para el estudio de los poco frecuentes casos de efectos adversos de medicamentos [Li & Kulldorff, 2009] y vacunas [Kulldorff, et al., 2011] y la vigilancia de componentes de plantas nucleares [Gross & Humenik, 2017], solo por mencionar a algunos.

Realizar muestreos a los lotes de productos ha sido, por mucho tiempo, la forma más práctica y eficiente de analizar el estado de dichos lotes [Prat, Tort-Martorell, Grima, & Pozueta, 1998]. A pesar de ello, es aún considerable el tiempo y recursos que pueden ser necesarios para realizar inspecciones de lotes de productos, que llegan o salen de una cadena de producción [Besterfield, 2009]. El realizar dichas inferencias sobre el estado de los lotes se logra gracias a procedimiento estadístico de prueba de hipótesis [Walpole, Myers, Myers, & Ye, 2007]. Al realizarla, por la propia naturaleza de una muestra que es solo una fracción que trata de ser

representativa del lote, existen sesgos de información que deben ser tomados en cuenta al momento de tomar una decisión. Estos sesgos son muy conocidos, el error tipo I o “ $\alpha$ ” o el riesgo de que lotes buenos pueden ser rechazados (riesgo del productor) y el error tipo II o “ $\beta$ ” o el riesgo de que lotes malos pueden ser aceptados (riesgo del consumidor) [Gryna, Chua, & DeFeo, 2007].

La prueba de razón de probabilidad secuencial es un método de inferencia estadística basado en estadística bayesiana, ampliamente diferenciado por dos características importantes: tamaño de muestra variable y la relación entre la precisión y la potencia de la prueba. En una prueba de razón de probabilidad secuencial el tamaño de muestra no es predefinido al comenzar la prueba, si no que pasa a ser una variable, que en teoría puede ser infinita [Wald, 1945]. Al realizar este tipo de pruebas, dentro del procedimiento son tomados en cuenta ambos tipos de errores típicos, siendo estos declarados al comienzo de la prueba, reflejando el rigor de la prueba. A pesar de que en teoría el muestreo puede ser infinito, con parámetros suficientemente holgados e hipótesis comparativas sensiblemente diferentes, el tamaño de muestras necesarias para un veredicto se reducirá en 50% o menos [Ostle, 1963].

Se presenta un estudio que se llevó a cabo dentro del departamento de calidad de una empresa dedicada a la manufactura de equipos de línea blanca. El estudio del muestreo se llevó a cabo en el área de recibo, específicamente, en un lote de electrodos de arranque para el encendido eléctrico de hornillas. Se evaluó la desviación estándar de la resistencia eléctrica del dispositivo. Los resultados de las observaciones reflejan una reducción del 97% del tamaño de muestra y del tiempo necesario para llegar a un veredicto sobre el lote.

## **2. Métodos**

Los datos se tomaron en el área de control de la calidad, en su laboratorio de pruebas. El procedimiento interno de la empresa determina que la metodología de muestreo y evaluación de los lotes entrantes por parte de terceros, como es el caso, es el AQL (Acceptable Quality Limit) [International organization standardization, 2005].

Para el propósito de nuestro estudio, las observaciones fueron tomadas aleatoriamente de forma secuencial, esto significa, que en teoría se tomaron “n” muestras de tamaño 1 de forma aleatoria. La cualidad de interés en las piezas a examinar es un valor nominal de sus valores de resistencia eléctrica ( $\Omega$ ) que abarca desde 45 a 175  $\Omega$ .

Las mediciones de las resistencias se realizan a través de una computadora especialmente acondicionada para realizar tal prueba con poca intervención del operador, cuenta con un electrodo que se conecta al puerto de entrada de la pieza, el resultado de la medición se presenta en una pantalla que le indica automáticamente al operador si se acepta o rechaza la unidad. Los datos de las observaciones son agregados inmediatamente a una hoja de cálculo y tras ser estos tratados bajo el procedimiento PRPS, son graficados para facilitar el análisis.

Es de especial interés para este estudio dos parámetros, el número de muestras necesarias para llegar a un veredicto y el tiempo invertido en tal tarea. Para este caso particular, se evaluó la desviación estándar de la muestra, tratando de asegurar que esta no es mayor a la estimada dados los límites de aceptación determinados por la propia organización. La ecuación 1 [Ostle, 1963], representa la sumatoria de los cuadrados de la diferencia entre la observación y la media de los datos, esta sumatoria representa la variable que determinará la aceptación o el rechazo de la hipótesis.

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \quad (1)$$

Donde:

- $x_i$  es el valor de la observación en turno.
- $\mu$  representa a la media esperada de los datos.

El valor de esta sumatoria deberá ser igual o menor a la siguiente función para que el lote examinado a través del muestreo sea aceptado, en otras palabras, demostrar conformidad con que el lote cumple con los requisitos impuestos. La ecuación 2 [Ostle, 1963] es la representación de la función de aceptación de la hipótesis nula.

$$A_n = \frac{2 \operatorname{Ln} \left[ \frac{\beta}{(1-\alpha)} \right] + n \operatorname{Ln} \left( \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} \right)}{\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}} \quad (2)$$

Donde:

- $\beta$  es la probabilidad del error tipo II.
- $\alpha$  es la probabilidad del error tipo I.
- $n$  es el número de muestras tomadas.
- $\sigma_0^2$  es la varianza de la hipótesis nula.
- $\sigma_1^2$  es la varianza de la hipótesis alternativa.
- $\operatorname{Ln}$  es logaritmo natural.

De converger con el valor de la siguiente función o superarlo, se rechaza suposición de que el lote cumple con los requisitos impuestos por lo que la varianza del lote esta fuera de la proporción estipula como aceptable. La ecuación 3 [Ostle, 1963] es la representación de la función de rechazo de la hipótesis nula.

$$R_n = \frac{2 \operatorname{Ln} \left[ \frac{(1-\beta)}{\alpha} \right] + n \operatorname{Ln} \left( \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} \right)}{\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}} \quad (3)$$

Donde:

- $\beta$  es la probabilidad del error tipo II.
- $\alpha$  es la probabilidad del error tipo I.
- $n$  es el número de muestras tomadas.
- $\sigma_0^2$  es la varianza de la hipótesis nula.
- $\sigma_1^2$  es la varianza de la hipótesis alternativa.
- $\operatorname{Ln}$  es logaritmo natural.

Mientras el valor de la sumatoria no sea igual o menor a  $A_n$  o igual o mayor a  $R_n$  la inspección de las piezas deberá continuar [Ostle, 1963]. De cumplir alguna de las dos situaciones anteriores, la prueba se detiene y se emite un veredicto. Como se mencionó con anterioridad, el objetivo del experimento fue el de medir el número de muestras necesarias para emitir el veredicto así como el tiempo invertido en tal tarea. Para corroborar estos dos datos se hace contabilizaron el número de muestras hechas y un cronometro para medir el tiempo invertido en tal tarea.

### 3. Resultados

El procedimiento de muestro propio de la empresa indica que para hacer un muestreo usando AQL es necesario un tamaño de muestra de 1296, tomándole al operador todo un turno (8 horas) en tomar una decisión sobre un lote de estas piezas. Para evaluar la desviación estándar del lote, primero se definieron algunos estadísticos, los cuales son necesarios para la utilización de las fórmulas vistas anteriormente, estos estadísticos están plasmados en la tabla 1.

Tabla 1 Estadísticos del caso.

Datos de estadísticos	
Estadístico	Valor
$\sigma_0$	40
$\sigma_1$	45
$\alpha$	0.05
$\beta$	0.2
$\mu$	110

Se hipotetiza que la desviación estándar del lote es 40  $\Omega$  y se prueba contra la hipótesis alternativa de que este estadístico es 45  $\Omega$ , siendo la primera de ellas la correspondiente a los límites establecidos como aceptables entre la organización y el productor; por último, se sabe que la media de los datos es de 110  $\Omega$  igualmente tomado de la base de datos de la organización.

Como es característico de este procedimiento, también son definidos los parámetros de precisión para la prueba; la probabilidad de rechazar un lote aceptable por un falso negativo es del 5%, por otro lado, la probabilidad de aceptar un lote defectuoso por un falso positivo es del 20%. En la tabla 2 podemos observar los datos requisados a través de la observación de la tarea de inspección por parte del operador a cargo.

Para corroborar la independencia de los datos recogidos se grafican las observaciones contra el número de observaciones. En la figura 1 se puede ver el resultado grafico de la comparativa. Dado que en el grafico no se presentan conicidades, se comprueba la independencia de los datos obtenidos durante la observación.

Tabla 2 Datos de resistencias.

n	Observaciones	n	Observaciones	n	Observaciones	n	Observaciones
1	64	16	113	31	86	46	74
2	190	17	76	32	63	47	67
3	75	18	73	33	111	48	64
4	64	19	75	34	90	49	85
5	66	20	71	35	67	50	71
6	134	21	73	36	66	51	65
7	70	22	81	37	72	52	66
8	75	23	68	38	70	53	65
9	76	24	66	39	80	54	85
10	71	25	87	40	73	55	61
11	80	26	74	41	71	56	82
12	66	27	69	42	66	57	86
13	78	28	139	43	66	58	84
14	69	29	99	44	76	59	67
15	75	30	119	45	84	60	70

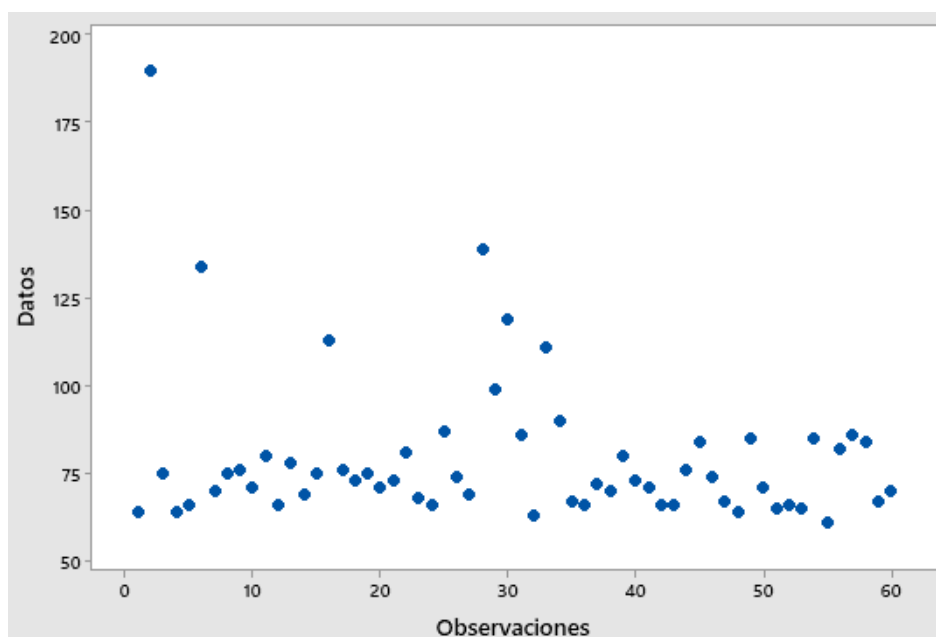


Figura 1 Comparación Datos vs observaciones.

Al tener en cuenta estas observaciones, son aplicadas las fórmulas de la prueba de razón de probabilidad secuencial [Ostle, 1963]. La tabla 3 contiene los valores de las funciones de la prueba secuencial para aceptar o rechazar la hipótesis nula (aceptar o rechazar el lote). Se realizaron un total de 60 observaciones y el valor de la sumatoria converge con el valor de la función de aceptación.

Tabla 3 Valores de la prueba secuencial.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a <sub>n</sub>	-21961.3	-20165.4	-18369.6	-16573.7	-14777.9	-12982.1	-11186.2	-9390.4	-7594.5	-5798.7
Σ(X-μ) <sup>2</sup>	2116	8516	9741	11857	13793	14369	15969	17194	18350	19871
r <sub>n</sub>	44069.7	45865.5	47661.4	49457.2	51253	53048.9	54844.7	56640.6	58436.4	60232.3
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a <sub>n</sub>	-4002.8	-2207	-411.1	1384.7	3180.6	4976.4	6772.2	8568.1	10363.9	12159.8
Σ(X-μ) <sup>2</sup>	20771	22707	23731	25412	26637	26646	27802	29171	30396	31917
r <sub>n</sub>	62028.1	63824	65619.8	67415.7	69211.5	71007.3	72803.2	74599	76394.9	78190.7
n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
a <sub>n</sub>	13955.6	15751.5	17547.3	19343.2	21139	22934.8	24730.7	26526.5	28322.4	30118.2
Σ(X-μ) <sup>2</sup>	33286	34127	35891	37827	38356	39652	41333	42174	42295	42376
r <sub>n</sub>	79986.6	81782.4	83578.3	85374.1	87169.9	88965.8	90761.6	92557.5	94353.3	96149.2
n	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
a <sub>n</sub>	31914.1	33709.9	35505.8	37301.6	39097.4	40893.3	42689.1	44485	46280.8	48076.7
Σ(X-μ) <sup>2</sup>	42952	45161	45162	45562	47411	49347	50791	52391	53291	54660
r <sub>n</sub>	97945	99740.9	101536.7	103332.5	105128.4	106924.2	108720.1	110515.9	112311.8	114107.6
n	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
a <sub>n</sub>	49872.5	51668.4	53464.2	55260.1	57055.9	58851.7	60647.6	62443.4	64239.3	66035.1
Σ(X-μ) <sup>2</sup>	56181	58117	60053	61209	61885	63181	65030	67146	67771	69292
r <sub>n</sub>	115903.5	117699.3	119495.2	121291	123086.8	124882.7	126678.5	128474.4	130270.2	132066.1
n	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
a <sub>n</sub>	67831	69626.8	71422.7	73218.5	75014.3	76810.2	78606	80401.9	82197.7	83993.6
Σ(X-μ) <sup>2</sup>	71317	73253	75278	75903	78304	79088	79664	80340	82189	83789
r <sub>n</sub>	133861.9	135657.8	137453.6	139249.4	141045.3	142841.1	144637	146432.8	148228.7	150024.5

## 4. Discusión

Comparando el tamaño de muestras necesarias para llegar a una conclusión por parte de la metodología AQL contra el PRPS, que es de 1296 y de 60 respectivamente, hay un ahorro del 95.37% en el número de muestras. Por otro lado, mientras AQL necesita de un total de 8 horas para concluir con su tarea de inspección, el PRPS necesitó solo de 17 minutos, lo cual se traduce a un ahorro en el tiempo de inspección del 96.45%.

Para facilitar la interpretación de los datos, los datos son trasladados a un grafica que representan cada una de las tres funciones propias de la muestra, figura 2.

## 5. Conclusión

La metodología PRPS permite un ahorro dramático de los recursos necesarios para realizar inferencias acerca del estado de los lotes de productos. Su uso en el muestreo de aceptación tiene el potencial de minimizar los costos inherentes a la



valoración del estado de los lotes sin reducir la precisión de la prueba o si es necesario, realizar una evaluación aún más exhaustiva con el mismo costo, afianzando más la decisión tomada por el personal.

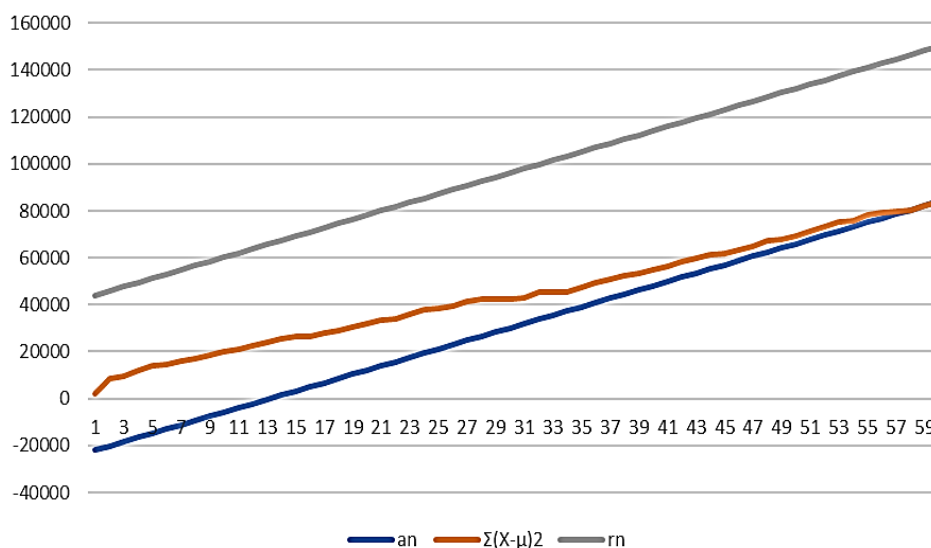


Figura 2 Gráfico PRPS.

Para el personal a cargo, esto se podría traducir a una reducción de su carga de trabajo, liberando al personal para la realización de nuevas tareas de aseguramiento de la calidad, haciendo inherentemente más productivo al proceso de producción.

## 6. Bibliografía y Referencias

- [1] Besterfield, D. (2009). Control de calidad. Naucalpan, Edo. de México: Pearson educación.
- [2] Gross, K. C., & Humenik, K. E. (2017). Sequential probability ratio test for nuclear plant component surveillance. Nuclear Technology, 131-137.
- [3] Gryna, F., Chua, R., & DeFeo, J. (2007). Método Juran: Análisis y planeación de la calidad. Mexico, DF: McGraw-Hill.
- [4] International organization standardization. (15 de Junio de 2005). ISO 2859-5:2005. Sampling procedures for inspection by attributes — Part 5: System of sequential sampling plans indexed by acceptance quality limit (AQL) for lot-by-lot inspection. Suiza: International Organization for Standardization.

- [5] Kulldorff, M., Davis, R. L., Kolczak, M., Lewis, E., Lieu, T., & Platt, R. (2011). A maximized sequential probability ratio test for drug and vaccine safety surveillance. *Sequential Analysis*, 58-78.
- [6] Li, L., & Kulldorff, M. (2009). A conditional maximized sequential probability ratio test for pharmacovigilance. *Statistics in medicine*, 284-295.
- [7] Ostle, B. (1963). *Statistics in research*. EUA, Iowa: THE IOWA STATE UNIVERSITY PRESS.
- [8] Prat, A., Tort-Martorell, X., Grima, P., & Pozueta, L. (1998). *Control y mejora de la calidad*. México, DF: Ediciones UPC.
- [9] Sebastino, A. G., Elie, V., Thi Viet Ha, P., & Jacqz-Aigran, E. (2018). Sequential analysis in neonatal research—systematic review. *European Journal of Pediatrics*, 733-740.
- [10] Wald, A. (1945). Sequential Tests of Statistical Hypotheses. *The Annals of Mathematical Statistics*, 117-186.
- [11] Walpole, R. E., Myers, R. H., Myers, S. L., & Ye, K. (2007). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*. Naucalpan de Juárez: Pearson educación de México, SA de CV.