

# **ESTIMACIÓN DE LOS COEFICIENTES DE INERCIA Y DE FRICCIÓN DE UN MOTOR DE CD**

## *ESTIMATION OF INERTIA AND FRICTION COEFFICIENTS OF A DC MOTOR*

***María Elizabeth Orquiz Ávila***

Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, México  
*al140636@alumnos.uacj.mx*

***Israel U. Ponce***

Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, México  
*israel.ulises@uacj.mx*

***Luis Tupak Aguilar Bustos***

IPN-CITEDI, México  
*laguilar@citedi.mx*

***Ángel Israel Soto Marrufo***

Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, México  
*angel.soto@uacj.mx*

**Recepción:** 17/octubre/2019

**Aceptación:** 23/noviembre/2019

### **Resumen**

En este trabajo se presentan algunos modelos de fricción, y se destaca la importancia de los parámetros de fricción viscosa y de Coulomb, los cuales son necesarios para definir los distintos modelos que describen el comportamiento de la fricción en sistema mecánicos. Se describen los métodos de torque constante y entrada tipo rampa para estimar los coeficientes de fricción viscosa y de Coulomb, estos métodos se aplican en un motor de CD para obtener sus parámetros. A fin de comprobar que los parámetros estimados son los adecuados, se diseña y se aplica un control de velocidad, utilizando un controlador proporcional con compensación. La estimación de los parámetros y el control de velocidad del motor se realiza de forma experimental utilizando una plataforma de Arduino UNO en conjunto con la herramienta de Simulink de MatLab. Los resultados muestran que los coeficientes de fricción estimados son adecuados.

**Palabras Claves:** Control, estimación, fricción, motor de CD.

## **Abstract**

*In this paper, some friction models are presented, highlighting the importance of viscous and Coulomb friction parameters, which are necessary to define the different models that describe the friction behavior in mechanical systems. The constant torque and ramp-type input methods for estimating viscous and Coulomb friction coefficients are described. These methods are applied in a DC motor, and their parameters are obtained. To verify that the estimated parameters are adequate, a speed control is designed and applied, using a proportional controller with compensation. Parameter estimation and motor speed control is performed experimentally using an Arduino UNO platform together with Simulink tool of MatLab. The results show that the estimated friction parameters are adequate.*

**Keywords:** control, friction, measurement, DC motor.

## **1. Introducción**

La fricción es un fenómeno físico de gran impacto en el análisis de sistemas mecánicos y en la aplicación a modelos de comportamiento de sistemas de control. La fricción representa uno de los factores que más dificultad presentan para ser compensados adecuadamente, esto debido a la gran cantidad de parámetros mediante los que se puede describir.

En la actualidad, existen modelos de análisis en los que la fricción viscosa y la fricción de Coulomb juegan un papel importante, siendo parte, tanto de los métodos más comunes como de algunos más complejos para el control de los sistemas físicos [Kelly, 2000].

Una forma efectiva de compensar la fricción requiere de una estimación adecuada de los parámetros que serán utilizados como parte del modelado del sistema físico, cuyo comportamiento se desea analizar [Freidovich, 2010].

De ahí que, es imperativo lograr un alto grado de exactitud al momento de estimar los parámetros de fricción involucrados en el desempeño de los controladores, pues en caso contrario, se aumenta el error en las mediciones, contraviniendo al objetivo general de usar esta variable para aumentar la eficiencia y precisión del control a utilizar.

Entre los métodos de estimación de fricción viscosa y de Coulomb usados en los motores de corriente directa (CD) se tienen dos. Uno de ellos se describe en [Kelly, 2000], el cual utiliza una rampa de entrada, y es utilizado en diversos trabajos como [Acho, 2007] y [Orlov, 2014]. El otro método utiliza un torque constante a la entrada [Ponce, 2015], y los coeficientes de fricción son obtenidos analizando el sistema en estado estacionario. Estos métodos de fricción permiten obtener un rango de operación lineal del sistema, lo cual no se especifica en la literatura mencionada.

En este trabajo, se aplican los métodos de estimación de fricción mencionados anteriormente en un motor de CD, para lo cual se utiliza un sistema de adquisición de datos mediante la plataforma Arduino.

Empleando el método de torque constante y el método de torque tipo rampa se obtienen los valores de los coeficientes de fricción viscosa y de Coulomb, realizado en estado estacionario, mientras que en estado transitorio se obtiene el valor de la inercia del motor de CD a controlar.

El objetivo de este trabajo es estimar los coeficientes de los parámetros de fricción viscosa y de Coulomb de un motor de CD, utilizando los métodos de torque constante y entrada tipo rampa; además se busca comprobar que los coeficientes de fricción estimados son adecuados, al observar el desempeño del sistema en lazo cerrado, al utilizar un control de velocidad, mediante un control proporcional por compensación, utilizando como mediciones la posición y velocidad angular.

En la sección 2 se describen la metodología para estimar los parámetros de fricción e inercia, así como también se presenta la plataforma experimental utilizada para el desarrollo experimental. En la sección 3 se presentan los resultados obtenidos, y su aplicación en el diseño de un controlador. Posteriormente, en la sección 4, se hace una discusión de los resultados obtenidos, y finalmente, en la sección 5, se presentan las conclusiones del trabajo.

## **2. Métodos**

### **Modelo Dinámico de un Motor de CD con Fricción**

El modelo dinámico, de un motor de corriente directa se puede escribir con ecuación 1 [Yao, 2014].

$$J\ddot{\theta} + F(\dot{\theta}) = Ku \quad (1)$$

Donde  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$  y  $\ddot{\theta}$  representan la posición, velocidad y aceleración angular del motor, respectivamente,  $J$  representa el momento de inercia del motor,  $F(\dot{\theta})$  es la fuerza de fricción que se opone al movimiento del motor,  $K$  es una constante de torque respecto al voltaje de entrada y  $u$  es el voltaje de entrada del motor. [Yao, 2014]

La fuerza de fricción representada por  $F(\dot{\theta})$  se puede definir a partir de distintos modelos como los que se presentan a continuación:

- **Modelo de fricción viscosa y de Coulomb.** Este modelo es bastante sencillo, el cual toma en cuenta los dos términos básicos que se incluyen en los demás modelos. Uno de estos términos, la fricción viscosa, es proporcional a la velocidad de desplazamiento, mientras que el otro término, el cual es un término discontinuo, es un término constante dependiente del signo de la velocidad, ecuación 2.

$$F(\dot{\theta}) = f_v \dot{\theta} + f_c \text{sign}(\dot{\theta}) \quad (2)$$

Donde  $f_v$  indica el coeficiente de fricción viscosa, y  $f_c$  representa el coeficiente de fricción de Coulomb. La función signo, indicada por  $\text{sign}(\cdot)$ , toma los valores dados por ecuación 3.

$$\text{sign}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi > 0, \\ 0 & \text{si } \xi = 0, \\ -1 & \text{si } \xi < 0. \end{cases} \quad (3)$$

En la figura 1, se muestra el comportamiento del modelo de fricción viscosa y fricción de Coulomb.

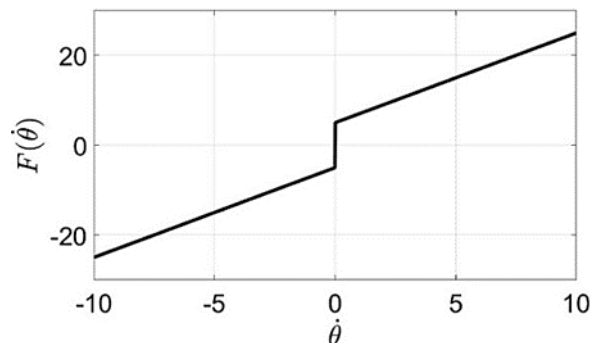


Figura 1 Modelo de fricción viscosa y de Coulomb.

- **Modelo de Armstrong** [Armstrong, 1991]. Este modelo considera dentro de su comportamiento el efecto Stribeck, el cual considera la reducción de la fricción cuando se incrementa la velocidad. Este modelo está representado por ecuación 4.

$$F(\dot{\theta}) = f_v \dot{\theta} + f_c \text{sign}(\dot{\theta}) + (f_e - f_c) \text{sign}(\dot{\theta}) e^{-(\dot{\theta}/v_s)^2} \quad (4)$$

Donde  $f_e$  representa la fricción estática, y  $v_s$  es el coeficiente de velocidad de Stribeck. El modelo matemático anterior se observa en la figura 2, el cual tiene los mismos valores de fricción viscosa y de Coulomb que el mostrado en la figura 1, el efecto de Stribeck se observa para un valor de  $1 \text{ rad/s}$ .

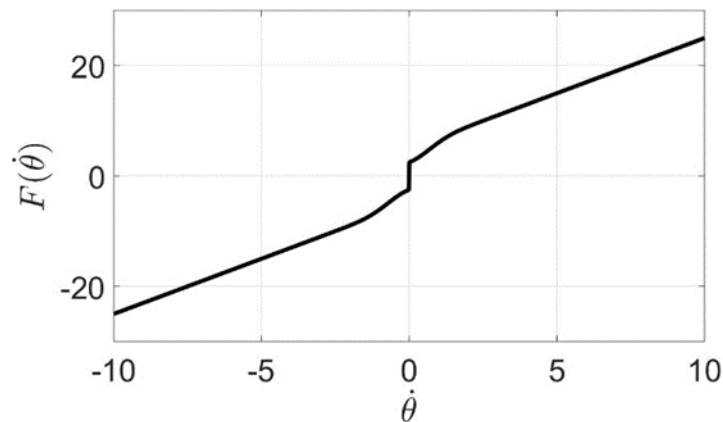


Figura 2 Modelo de fricción de Armstrong.

- **Dahl.** Este es un modelo basado en el comportamiento de las asperezas que forman el contacto entre dos superficies, mismo que en su modelo considera una variable de estado  $z$  para representar la deflexión promedio, que al ser multiplicada por un coeficiente de rigidez  $\sigma_0$  permite obtener la fuerza o par de fricción. Para este modelo, la descripción de la región de deslizamiento tiende a la fricción de Coulomb, el modelo está representado por ecuación 5.

$$F(\dot{\theta}) = \sigma_0 z(\dot{\theta}) \quad (5)$$

Aquí  $z$  es la deflexión promedio y  $\sigma_0$  es el coeficiente de rigidez,  $z$ , el cual tiene relación con la fricción viscosa, y tiene la dinámica propia, ecuación 6.

$$\dot{z}(\dot{\theta}) = -\sigma_0 |\dot{\theta}| f_c z + \dot{\theta} \quad (6)$$

En ecuación 2 se observa que el término correspondiente a la fricción de Coulomb,  $f_c \cdot \text{sign}(\dot{\theta})$ , es un término discontinuo, el cual complica el análisis y solución de las ecuaciones diferenciales resultantes. El modelo de fricción de Dahl evita el uso de la función *signo*, al utilizar un modelo dinámico, esto simplifica la solución de las ecuaciones diferenciales, pero tiene como consecuencia un aumento del orden del sistema dinámico de la planta resultante.

- **LuGre.** Propuesto en [Canudas, 1993]. Este es un modelo de fricción basado en la elasticidad del contacto. Es una generalización del modelo de Dahl, lo que también permite considerar características estáticas y dinámicas de la fricción ya que esta última no tiene una respuesta inmediata a un cambio de velocidad, lo que, para modelos que solo usan características estáticas resulta difícil de lograr. El modelo puede ser consultado con mayor detalle en [Canudas, 1993].

Los modelos de fricción descritos requieren el conocimiento de los parámetros de fricción viscosa y de Coulomb para su descripción, de ahí la importancia de estos. En este trabajo se utiliza el modelo de fricción viscosa y de Coulomb, el cual limita el rango de operación de los motores de CD para obtener un control de velocidad eficiente, tal como se verá en los resultados obtenidos.

### **Métodos de Medición de los Coeficientes de Fricción Viscosa y de Coulomb**

A continuación, se describen los dos métodos que se utilizarán en este trabajo para estimar la fricción viscosa y de Coulomb. Estos métodos se basan en cierta forma en el comportamiento en estado estable del motor de CD, mientras que el parámetro de la inercia, que también se estima, se obtiene considerando el estado transitorio de la velocidad del motor:

- **Método del torque constante.** Utilizando ecuaciones 1 y 2 para representar la dinámica del motor, y considerando un valor de  $K = 1 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{V}$  a fin de simplificar las ecuaciones, se llega a un sistema dado por ecuación 7.

$$J\ddot{\theta} + f_v\dot{\theta} + f_c\text{sign}(\dot{\theta}) = u \quad (7)$$

Considerando una respuesta en estado estacionario, para un torque constante, se obtiene

$$f_v \dot{\theta}_i + f_c \text{sign}(\dot{\theta}_i) = \tilde{u}_i \quad (8)$$

Donde  $\dot{\theta}_i$  es la velocidad en estado estacionario al aplicar un voltaje constante  $\tilde{u}_i$  al motor. Si se realizan  $n$  experimentos, con  $n$  valores constantes de voltaje  $\tilde{u}_i$  se pueden observar la misma cantidad de velocidad constantes  $\dot{\theta}_i$ , lo cual lleva a un sistema de  $n$  ecuaciones lineales dado por ecuación 9.

$$\tilde{U} = f_v \dot{\Theta} + f_c \mathbf{1}_{n \times 1} \quad (9)$$

Para  $\tilde{U} = [u_1, u_2, \dots, u_n]$  y  $\dot{\Theta} = [\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dots, \dot{\theta}_n]$ , con  $\mathbf{1}_{p \times q}$ , una matriz de unos con dimensión  $p \times q$ . Si se considera que  $f_v$  y  $f_c$  son valores constantes, ecuación 10.

$$\begin{bmatrix} f_v \\ f_c \end{bmatrix} = \tilde{U} [\dot{\Theta} \quad \mathbf{1}_{n \times 1}] [\dot{\Theta} \dot{\Theta}^T \quad \mathbf{1}_{n \times n}]^{-1} \quad (10)$$

Lo cual corresponde al método de mínimos cuadrados para encontrar tendencia lineal entre  $\dot{\theta}_i$  y  $\tilde{u}_i$ .

- **Método de entrada tipo rampa** [Ponce, 2015]. Este método consiste en aplicar una entrada, ecuación 11.

$$u = rt \quad (11)$$

Para una pendiente  $r \in \mathbb{R}$ , dada en rad/s, y todo tiempo  $t \in \mathbb{R}^+$  dado en segundos. La dinámica del sistema en lazo abierto resultante al aplicar esta entrada al sistema (Ecuación 7) estará definido por ecuación 12.

$$J\ddot{\theta} + f_v \dot{\theta} = rt - f_c \text{sign}(\dot{\theta}) \quad (12)$$

El sistema anterior se resuelve para  $\dot{\theta}$ , considerando  $t \geq \frac{f_c}{r}$ , utilizando transformada de Laplace con condiciones iniciales  $\dot{\theta}(t < \frac{f_c}{r}) = \theta(0) = 0$ , y tomando en cuenta que  $\text{sign}(\dot{\theta}) = \text{sign}(r)$ , lo cual se verifica fácilmente. De ahí resulta ecuación 13.

$$\dot{\theta} = \begin{cases} 0, & \text{para } t < \frac{f_c}{r} \\ \frac{r}{f_v} \left( t - \frac{f_c}{r} \right) - \left( \frac{Jr}{f_v^2} \right) \left( 1 - e^{-\frac{f_v}{J} \left( t - \frac{f_c}{r} \right)} \right), & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (13)$$

De la ecuación anterior, se tiene que, en estado estacionario, esto es, cuando  $t \rightarrow \infty$ ,  $\dot{\theta}$  tiende a un comportamiento dado por ecuación 14.

$$\dot{\theta}_s = \frac{r}{f_v} t - \left( \frac{f_c}{f_v} + \frac{Jr}{f_v^2} \right) \quad (14)$$

Experimentalmente, se obtienen los valores de la pendiente  $m$ , y de la ordenada al origen  $b$  (figura 3) al aplicar una entrada tipo rampa al motor, estos corresponden a los parámetros que definen la línea recta de tendencia del estado estacionario de la velocidad, de tal forma que los valores obtenidos experimentalmente  $m$  y  $b$  se obtienen mediante ecuaciones 15.

$$m = \frac{r}{f_v} \quad \text{y} \quad b = \left( \frac{f_c}{f_v} + \frac{Jr}{f_v^2} \right) \quad (15)$$

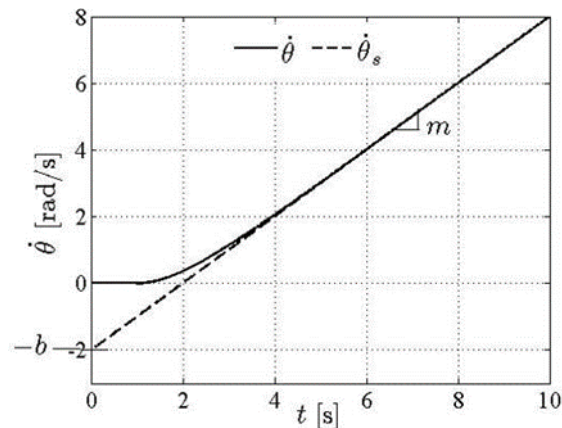


Figura 3 Comportamiento de la velocidad al aplicar un torque tipo rampa.

De ahí, el coeficiente de la fricción viscosa estará dado por ecuación 16.

$$f_v = \frac{r}{m} \quad (16)$$

Y el coeficiente de la fricción de Coulomb estará dado por ecuación 17.

$$f_c = b f_v - \frac{Jr}{f_v} \quad (17)$$



Si  $r$  es suficientemente pequeño de tal forma que  $r \ll \frac{bf_v^2}{J}$ , entonces la ecuación 17, se reduce a ecuación 18.

$$f_c = bf_v \quad (18)$$

Lo anterior coincide con lo que se expone en [Kelly, 2000], con la diferencia de que ahí se menciona que  $r$  debe ser lo suficientemente grande, tal que  $r \gg \frac{m^2J}{b}$ . Esta última aseveración es confusa, ya que pone una cota mínima, a diferencia de la cota máxima dada por ecuación 18, además, esto tiene como consecuencia una sobreestimación de  $f_c$  si se considera un valor suficientemente grande para  $r$ , ya que en [Kelly, 2000] se desprecia el segundo término de ecuación 17.

- **Estimación del coeficiente de inercia del motor.** A diferencia de la estimación de los coeficientes de fricción viscosa y de Coulomb, que son obtenidos en estado estable, el coeficiente de inercia del motor se obtiene en estado transitorio. Considerando una velocidad inicial,  $\dot{\theta}_0 = \dot{\theta}(0)$  para una entrada nula,  $u = 0$ , de manera analítica. se obtiene la velocidad final,  $\dot{\theta}_f = \dot{\theta}(t_f)$ , la cual está dada por ecuación 19.

$$\dot{\theta}_f = -\frac{f_c \text{sign}(\dot{\theta}_0)}{f_v} + \left( \dot{\theta}_0 + \frac{f_c \text{sign}(\dot{\theta}_0)}{f_v} \right) e^{-\frac{f_v}{J}t_f} \quad (19)$$

De la ecuación 19 se tiene que el coeficiente de inercia está dado por ecuación 20.

$$J = \frac{f_v t_f}{\ln \left| \frac{\dot{\theta}_0 f_v + f_c \text{sign}(\dot{\theta}_0)}{\dot{\theta}_f f_v + f_c \text{sign}(\dot{\theta}_0)} \right|} \quad (20)$$

La ecuación 20 es utilizada para obtener el valor de inercia del motor.

## Control de Velocidad del Motor

Para verificar que los parámetros estimados corresponden a los reales, se diseñó un control de velocidad utilizando un término de compensación. Primeramente, se define el error,  $e$ , a estabilizar, ecuación 21.

$$e = \dot{\theta} - \dot{\theta}_d \quad (21)$$

Donde  $\dot{\theta}_d$  es el valor de velocidad deseada, que para este caso se considera constante. La dinámica del error, obtenida de la deriva temporal de la ecuación 21 y considerando ecuación 12, se puede escribir como ecuación 22.

$$\dot{e} = -f_v e - f_v \dot{\theta}_d - f_c \text{sign}(\dot{\theta}) + u \quad (22)$$

Para estabilizar el error se propone un control que estabilice el sistema y compense los términos no lineales de la ecuación anterior. El control propuesto se define por ecuación 23.

$$u = f_v \dot{\theta}_d + f_c \text{sign}(\dot{\theta}) + k_1 e + k_2 \theta - k_2 \int_0^t \dot{\theta}_d dt \quad (23)$$

Por lo que la dinámica del error del sistema realimentado (22) y (23) se define como

$$\dot{e} = -f_v e + k_1 e + k_2 \theta - k_2 \int_0^t \dot{\theta}_d dt \quad (24)$$

El sistema es estable para  $k_1 < f_v$  y  $k_2 < 0$ .

### Plataforma Experimental

Para llevar a cabo los experimentos se utilizó una interfaz con la plataforma Arduino UNO, la cual se programó para utilizarse con la PC emulando una comunicación serial a través del puerto USB. El manejo y control de los datos se hizo a través de la PC utilizando Simulink de Matlab versión 2016b. El tiempo de muestreo utilizado para todos los experimentos fue de 10 ms. En la figura 4, se presenta un diagrama a bloques de la plataforma experimental utilizada para el control y manejo de los datos.

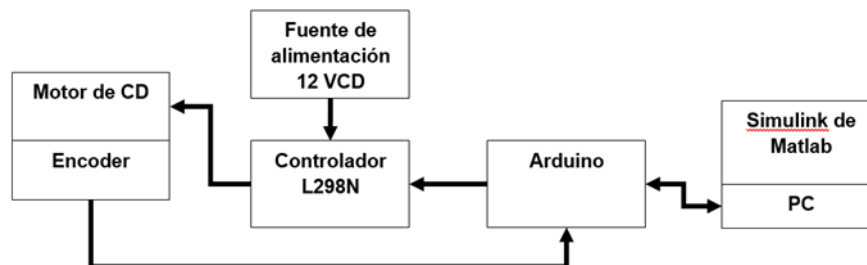


Figura 4 Plataforma experimental.

### 3. Resultados

El motor de CD que se utilizó (figura 5) para demostrar los métodos propuestos tiene un número de serie GB37Y3530-30EN, el cual es un motor de 12 V, 366 RPM, cuenta con un engranaje con relación 30:1, y un encoder de 64 PPR (puntos por revolución) en cuadratura.



Figura 5 Motor 1 utilizado en los experimentos.

**Método del torque constante.** Para obtener los parámetros de fricción viscosa y de Coulomb, primero se utilizó el método de torque constante, para lo cual se aplicó una señal de entrada  $u(t)$  como la que se muestra en la figura 6.

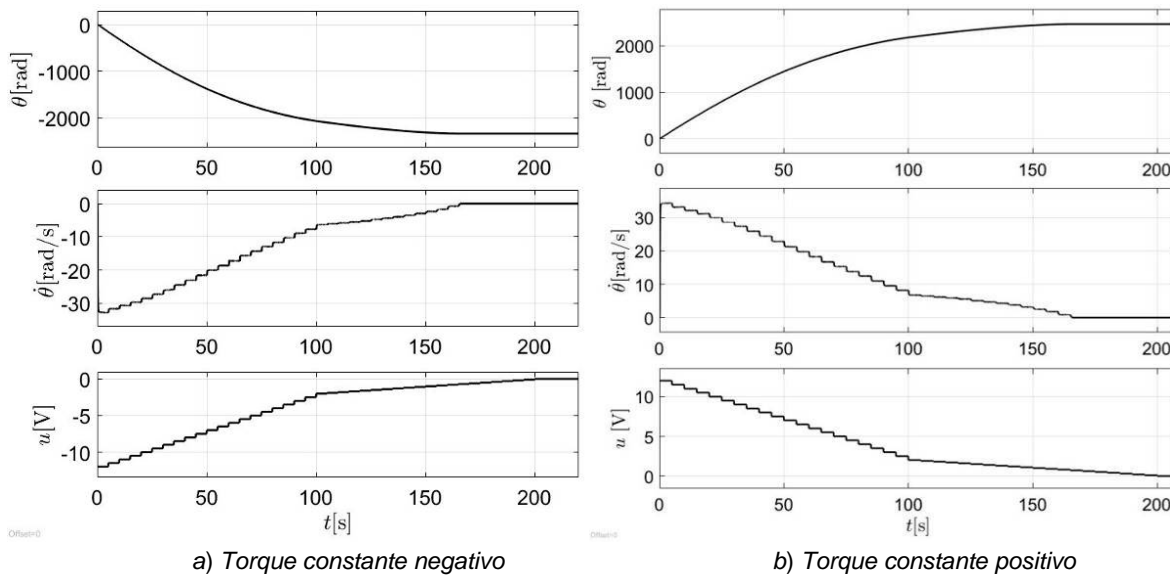


Figura 6 Aplicación de torque constante.

De las gráficas de velocidad ( $\dot{\theta}$ ) y voltaje de entrada de la figura 6, se trazó la gráfica de la figura 7 del comportamiento de la velocidad en estado estable respecto al voltaje de entrada del motor.

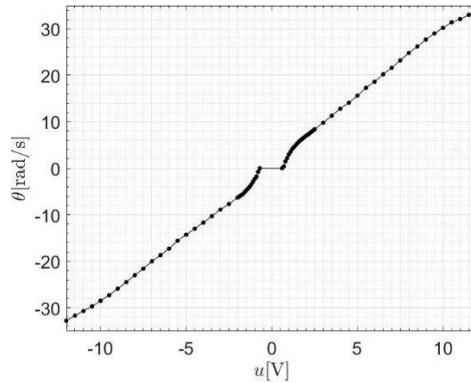


Figura 7 Comportamiento de la velocidad estacionaria respecto al voltaje de entrada.

El método del torque constante se aplica a los datos mostrados la gráfica de la figura 7, de donde se obtienen el coeficiente de fricción viscosa  $f_v = 0.34895 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$ , y el coeficiente de fricción de Coulomb  $f_c = -0.04775 \text{ N}\cdot\text{m}$ . Partiendo de estos valores se propone una tendencia de comportamiento lineal en la gráfica de la figura 7, dada por ecuación 25.

$$u(t) = 0.34895\dot{\theta}_l - 0.04775 \text{ sign}(\dot{\theta}_l) \quad (25)$$

Donde  $\dot{\theta}_l$  es la velocidad lineal obtenida en la gráfica de la figura 7. Utilizando ecuación 25, se obtiene el error de tendencia, definido como por ecuación 26.

$$e_t = \dot{\theta} - \dot{\theta}_l \quad (26)$$

Este error, permite visualizar un rango de operación lineal del motor, el cual se observa en la gráfica de la figura 8, donde se traza el comportamiento de error cuadrático de tendencia ( $e_t^2$ ).

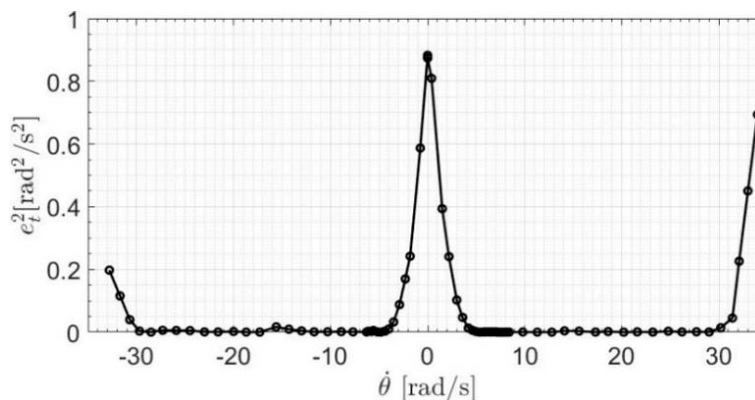


Figura 8 Comportamiento del error cuadrático de tendencia.

La gráfica de la figura 8, muestra que el motor tiende a un comportamiento lineal en un rango aproximado de 5 a 29 rad/s. Este rango corresponde a la región de operación lineal del motor, que responde al comportamiento dado por (7), y debe ser considerado en el diseño del controlador.

**Método de la entrada tipo rampa.** Se aplicó el método tipo rampa para obtener los parámetros de fricción viscosa y de Coulomb, y compararlos con el método de torque constante. Para este caso, se aplicó una rampa con pendiente  $r = 0.2 \text{ V/s}$ . De lo cual se obtuvo gráficas mostradas en figura 9. Se observa que el motor requiere la aplicación de un voltaje mínimo de 0.6 V para iniciar su movimiento.

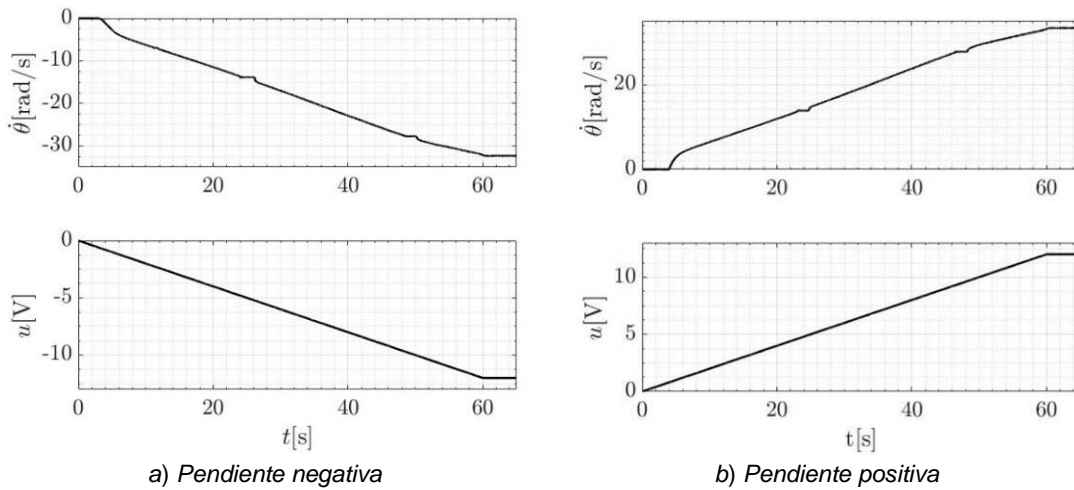


Figura 9 Entrada de tipo rampa.

De la gráfica de velocidad,  $\dot{\theta}$ , de la figura 9 se obtuvieron los valores registrados en la tabla 1. Los parámetros de fricción viscosa y de Coulomb, se estiman a partir del promedio de valores obtenidos, quedando  $f_v = 0.3497 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$ , y  $f_c = -0.11 \text{ N}\cdot\text{m}$ .

Tabla 1 Valores para estimar los coeficientes de fricción viscosa y de Coulomb.

Parámetro		Rampa positiva	Rampa negativa
Pendiente de la rampa de entrada.	$r$	0.2 V/s	0.2 V/s
Pendiente de la gráfica de velocidad	$m$	0.5811 rad/s <sup>2</sup>	-0.5626 rad/s <sup>2</sup>
Ordenada al origen de la gráfica de velocidad	$b$	0.3666 rad/s	-0.2676 rad/s
Coefficiente de fricción viscosa	$f_v$	0.3441 N·m·s	0.3555 N·m·s
Coefficiente de fricción de Coulomb	$f_c$	-0.1261 N·m	-0.09513 N·m

A partir de los valores de la tabla 1, se obtienen las ecuaciones lineales  $\dot{\theta}_{lp} = 0.5811t + 0.366$ , para la rampa positiva, y  $\dot{\theta}_{ln} = -0.5625t - 0.2676$ , para la rampa negativa. Utilizando estas ecuaciones, se determina el error entre  $\dot{\theta}$  y  $\dot{\theta}_{lx}$ , el cual se define como ecuación 27.

$$e_l = \dot{\theta} - \dot{\theta}_{lx} \quad (27)$$

Donde  $\dot{\theta}_{lx}$  es la velocidad lineal obtenida en la gráfica de la figura 9. Utilizando el cuadrado del error  $e_l$ , se traza la gráfica de la figura 10. De esta gráfica, se observa que en el rango de 3 a 29 rad/s, el motor tiene un comportamiento lineal.

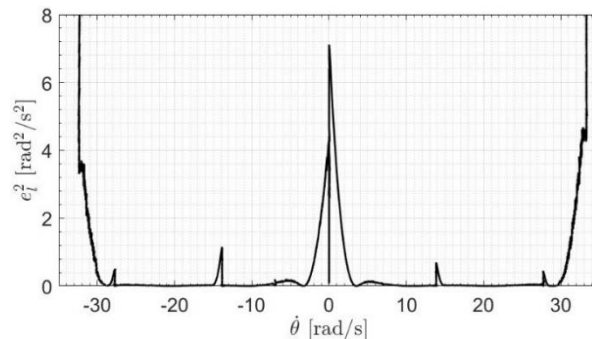


Figura 10 Comportamiento experimental del error cuadrático  $e_l^2$ .

**Determinación de la inercia del motor.** La inercia del motor se determinó a partir del comportamiento en estado transitorio de la velocidad. Se aplicó un tren de pulsos a la entrada del motor, y se observó el comportamiento transitorio con entrada nula. En figura 11 se observa el voltaje de entrada aplicado al motor, y el comportamiento de la velocidad utilizados para determinar el parámetro de inercia del motor.

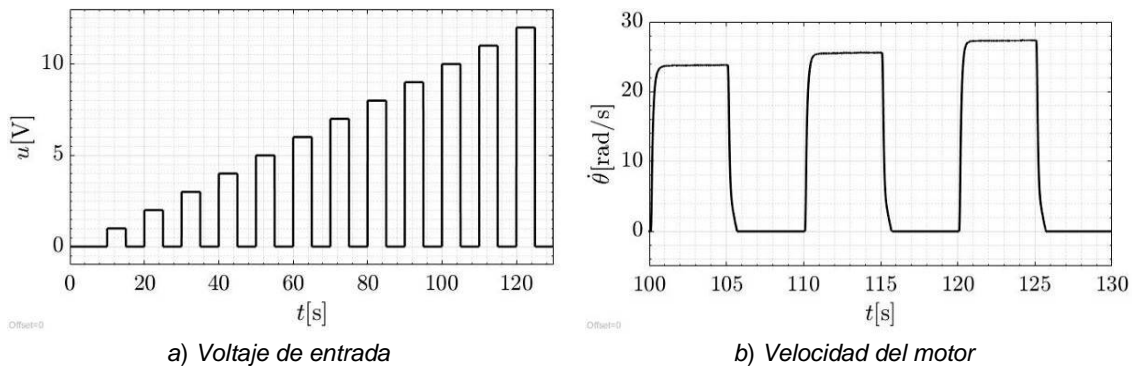


Figura 11 Obtención de la inercia.

De las mediciones obtenidas a partir de la gráfica de la figura 11b, utilizando ecuación 20 y los valores de los coeficientes de la fricción, se obtuvo un valor de la inercia del motor de  $J = 0.04053 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$  para el método de torque constante y un valor de  $J = 0.04317 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$  para el método de rampa de entrada.

**Control de velocidad.** Con los valores de los parámetros obtenidos, y utilizando ecuación 23 con  $k_1 = -0.2$  y  $k_2 = -0.1$ , se realizaron experimentos para observar el comportamiento del sistema en lazo cerrado. Los resultados obtenidos se observan en la figura 12. Se puede ver que el sistema en lazo cerrado realiza el seguimiento de la velocidad deseada.

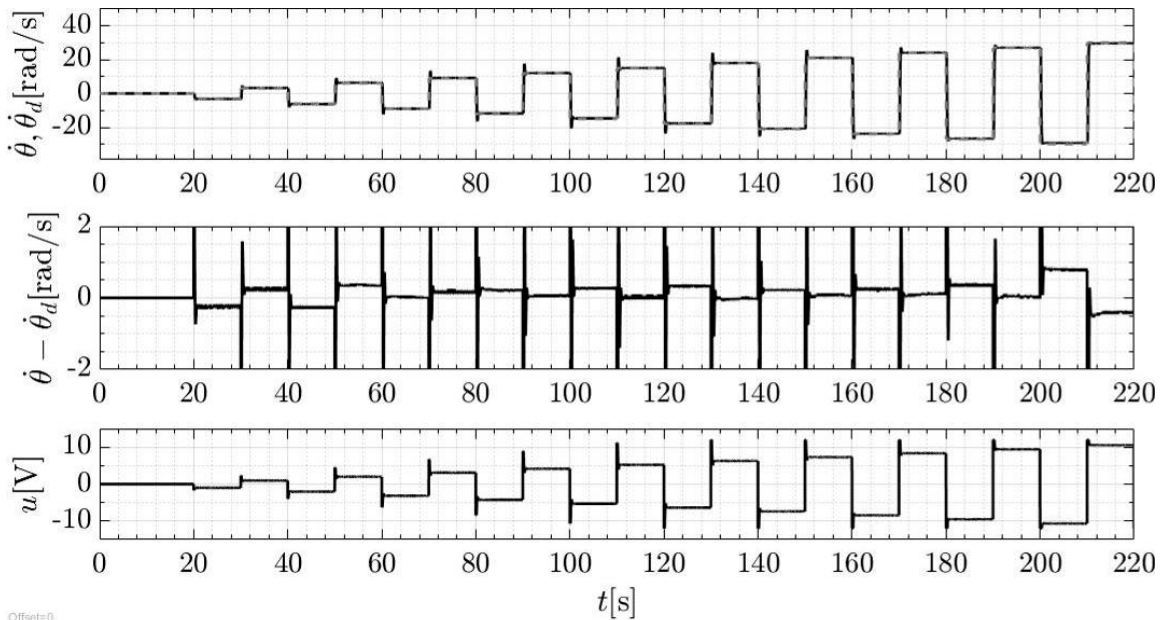


Figura 12 Comportamiento del sistema en lazo cerrado (parámetros estimados).

En la figura 13 se muestran los resultados del comportamiento del sistema en lazo cerrado considerando una estimación del parámetro de fricción viscosa  $f'_v = 0.15 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$ . El experimento se realizó considerando al resto de los parámetros sin cambio.

Al utilizar los parámetros estimados en el controlador de la planta se observó que el comportamiento obtenido a partir de ambos métodos resulta similar, pues en ambos casos el error se mantiene en un rango significativamente pequeño (figura 12). Se puede ver que incluso cuando se sale del rango de operación lineal, el

comportamiento del sistema en lazo cerrado el error se mantiene mucho menor a diferencia del caso en el cual se tiene una variación paramétrica (figura 13.), y donde se muestra que el comportamiento del error es de una mayor magnitud.

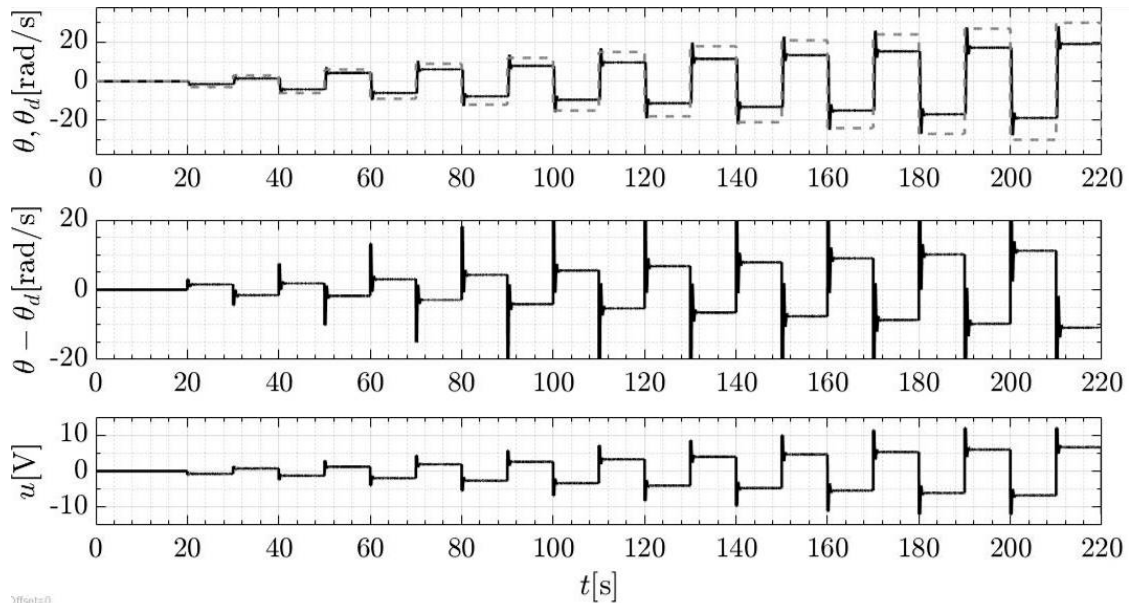


Figura 13 Comportamiento del sistema en lazo cerrado ( $f_v = 1.5 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$ ).

Al utilizar los parámetros de fricción estimados para el diseño del controlador se observó que el comportamiento de la velocidad, obtenido a partir de ambos métodos, resulta similar, esto debido a que la diferencia entre los valores estimados con uno y otro método es mínima. En ambos casos el error de velocidad se mantiene en un rango significativamente pequeño, aún y cuando la velocidad deseada aumenta, y sale del rango de operación lineal, el error de velocidad no excede los 3 rad/s. Cuando se tienen variaciones paramétricas, se observa que el error aumenta de manera significativa, superando los 20 rad/s, lo cual se observa en la figura 13.

#### 4. Discusión

Los coeficientes de la fricción viscosa y de Coulomb estimados con los dos métodos utilizados fueron muy similares. Para el coeficiente de fricción viscosa ( $f_v$ ) se obtuvieron prácticamente los mismos resultados, 0.34895 N·m·s para el método de torque constante, y 0.3497 N·m·s para el método de entrada tipo rampa. Mientras



que, para el coeficiente de fricción de Coulomb se obtuvieron los valores de  $-0.04775$  N·m para el método de torque constante y  $-0.11$  N·m para el método de entrada tipo rampa. De estos resultados, se observa que el coeficiente de fricción de Coulomb presenta realmente un valor poco significativo, sin embargo, se debe considerar que esto, aplica para un rango de operación del motor entre 5 y 29 rad/s. El coeficiente de fricción de Coulomb estimado para el rango entre 5 y 29 rad/s resultó tener un valor negativo, lo cual no era lo que se esperaba, sin embargo, para velocidades menores a 5 rad/s, se debe considerar un coeficiente de fricción de Coulomb positivo con una magnitud mucho mayor a la obtenida, ya que es evidente que la fricción de Coulomb debe afectar el comportamiento del sistema para velocidades bajas, esto de acuerdo a la figura 7.

El valor de la inercia del motor se estimó con los resultados de ambos métodos, la diferencia fue mínima, un valor de  $0.04053$  kg·m<sup>2</sup> para el método del torque constante y  $0.04317$  kg·m<sup>2</sup> para el método de la entrada tipo rampa.

El sistema en lazo cerrado a simple vista tiene un buen desempeño en cuanto al error de seguimiento de velocidad. El error se mantiene en un valor bajo en el rango de operación lineal del motor, pero se observa un aumento del error cuando el motor opera fuera de este rango.

Cuando se probó el control de velocidad utilizando variaciones paramétricas, se observó que el error de seguimiento de velocidad aumentó significativamente, tal como se observa al comparar la figura 12 y figura 13.

## **5. Conclusiones**

La estimación de los parámetros de fricción por cualquiera de los dos métodos expuestos resulta bastante adecuada, ya que al realizar el diseño del control de velocidad y aplicarlo de manera experimental se observó que el sistema en lazo cerrado tiene un buen comportamiento respecto al error de seguimiento de velocidad. El control propuesto, tipo PI (proporcional integral), que utiliza las mediciones de posición y velocidad, logró un buen seguimiento de velocidad, y se observó que al modificar los parámetros el error aumenta significativamente.

## 6. Bibliografía y Referencias

- [1] Acho, L., Iurian, C., Ikhoulane, F., & Rodellar, J. (2007). Robust-Adaptive Control of Mechanical Systems with Friction. Proceedings of the 2007 American Control Conference. New York.
- [2] Armstrong-Hélouvry, B. (1991). Control of Machines with Friction. Springer US.
- [3] Canudas de Wit, C. C., Olsson, H., Astrom, K. J., & Lischinsky, P. (1993). Dynamic Friction Models and Control Design. American Control Conference. San Francisco, CA, USA.
- [4] Freidovich, L., Robertsson, A., Shiriaev, A., & Johansson, R. (2010). LuGre-Model-Based Friction Compensation. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 18(1), 194-200.
- [5] Kelly, R., Llamas, J., & Campa, R. (Aug de 2000). A measurement procedure for viscous and coulomb friction. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 49(4), 857-861.
- [6] Orlov, Y., & Aguilar, L. T. (2014). Advanced H-infinity Control. New York: Birkhäuser.
- [7] Ponce, I. U., Orlov, Y., & Cuesta Garcia, J. R. (2015). Comparación de dos métodos de estimación de los parámetros de las fricciones viscosa y de Coulomb para un motor de CD. Congreso de Instrumentación SOMI XXX. Durango, Mexico.
- [8] Yao, J., Jiao, Z., & Ma, D. (12 de 2014). RISE-Based Precision Motion Control of DC Motors With Continuous Friction Compensation. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 61, 7067-7075.