

Método de Diferencias Finitas como Herramienta para la Enseñanza e Investigación en Electromagnetismo

Jorge Sosa-Pedroza

Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Sección de Estudios de Posgrado e Investigación
Instituto Politécnico Nacional
jsosa@ipn.mx

Fabiola Martínez-Zúñiga

Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Sección de Estudios de Posgrado e Investigación
Instituto Politécnico Nacional
fmartinezzu@ipn.mx

Esteban Cerda Palma

Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Estudiante de la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación
Instituto Politécnico Nacional
elteba_zx10r@hotmail.com

Resumen

El estudio de la propagación de ondas electromagnéticas mediante el método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (MDFDT) permite apreciar de manera clara, entre otras cosas, los efectos de la propagación electromagnética asociados a los cambios en las propiedades materiales del medio. El método es una herramienta poderosa, no sólo para el análisis de propagación electromagnética sino para la enseñanza del electromagnetismo, que como se sabe es un tema de difícil aprendizaje, principalmente a nivel de licenciatura. En la ESIME IPN, usamos el modelo como método

de enseñanza mostrando gráficamente cómo se comporta el campo EM propagándose en medios abiertos, o incidiendo en obstáculos que afectan la propagación; también usamos el método en investigación, modelando antenas o propagación en ambientes cerrados e incluso a nivel molecular, usando frecuencias en THz. El modelo se basa en la discretización de las ecuaciones de Maxwell para que puedan ser manejados por una computadora, lo que permite analizar en tiempo real, el efecto de propagación electromagnética en cualquier medio y en cualquier condición planteada por la teoría. Este trabajo describe como es el MDFDT y las aplicaciones que los autores le han dado para la enseñanza y la investigación.

Palabras Claves: Método de diferencias finitas en el dominio del tiempo, solución numérica de Ecuaciones diferenciales, simulación de propagación electromagnética.

1. Introducción

El método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo [1,2], es un procedimiento computacional que resuelve las ecuaciones de Maxwell en forma discreta, mediante la definición puntual de las características electromagnéticas del medio. Como se sabe las Ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial definen el comportamiento del campo electromagnético puntualmente; la solución por métodos analíticos da como resultado ondas que se propagan en el espacio. El MDFDT se utiliza para encontrar una solución explícita a las ecuaciones de Maxwell por medios computacionales, aunque puede ser aplicado a sistemas de ecuaciones diferenciales dependientes del tiempo y del espacio. La solución sigue los siguientes pasos:

- i. Se parte de una ecuación diferencial parcial (EDP) o de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales (SEDP).
- ii. Se realiza una discretización en tiempo y en espacio dando origen a una ecuación de diferencias (ED). En la conversión en el tiempo se define un intervalo de tiempo como los tiempos discretos donde se evalúa la ED. En las coordenadas espaciales se considera lo mismo con las componentes.

- iii. Se establece un área delimitada de solución donde se resuelven las ED por medio del algoritmo de Yee [3]. El algoritmo no sólo considera las ecuaciones diferenciales discretas, sino también la limitación del “espacio” de cómputo, la estabilidad de la solución y la fuente original del campo.

En los siguientes párrafos se describen cada uno de los elementos empleados en el procedimiento.

2. Desarrollo

2.1. El algoritmo de Yee

Para tratar un problema usando el MDFDT se debe dividir el área de solución en celdas rectangulares llamadas células de Yee. En la Fig. 1 podemos observar una célula y notar cómo se encuentran intercalados en espacio los campos eléctrico y magnético. Esto se debe a la naturaleza rotacional de las ecuaciones de Maxwell donde la variación en tiempo de un campo implica un cambio en la posición de otro. Esto quiere decir que los campos eléctrico y magnético se auto-soportan uno al otro y ésta es la principal razón que hace posible utilizar el algoritmo de Yee.

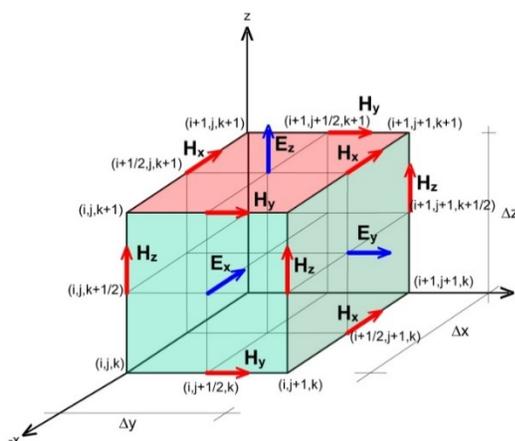


Fig. 1. Célula de Yee. Los campos eléctricos se encuentran sustentados por un par de componentes transversales de campo magnético y viceversa.

En el espacio-tiempo un campo cualquiera $A_s(x, y, z, t)$ (A puede ser campo eléctrico o campo magnético) donde t representa el tiempo dado, s la componente rectangular de dicho campo y (x, y, z) las coordenadas espaciales, se discretiza convirtiendo una ecuación diferencial en una ecuación de diferencias; si se considera para las derivadas una fórmula de diferencia central dada por:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} + O\{(\Delta x)^2\} \quad (1)$$

donde el error $O\{(\Delta x)^2\}$ se puede considerar despreciable. De esta forma la derivada parcial temporal de un campo cualquiera puede escribirse como:

$$\partial_t A_s(x, y, z, t) = \frac{A_s^{n+1/2}(i, j, k) - A_s^{n-1/2}(i, j, k)}{\Delta t} \quad (2)$$

y la espacial:

$$\partial_x A_s(x, y, z, t) = \frac{A_s^n(i + 1/2, j, k) - A_s^n(i - 1/2, j, k)}{\Delta x} \quad (3)$$

y de igual forma los casos correspondientes a ∂_y, ∂_z . Las ecuaciones de Maxwell rotacionales en forma diferencial se pueden escribir como: [4]:

$$\partial_t \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} (\nabla \times \mathbf{H} - \sigma \mathbf{E}) \quad (4)$$

$$\partial_t \mathbf{H} = -\frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{E} + \sigma^* \mathbf{H}) \quad (5)$$

donde hemos considerado un medio sin fuentes eléctricas ni magnéticas. Las propiedades electromagnéticas constitutivas del medio son: la permitividad ϵ , la

permeabilidad μ , así como la conductividad eléctrica σ y la resistividad magnética σ^* , en el caso de medios no homogéneos, cada célula de Yee también tendrá sus valores particulares de cada una de estas propiedades.

2.2. Discretización de las ecuaciones rotacionales de Maxwell para medios no homogéneos en ausencia de fuentes

Para discretizar las ecuaciones de Maxwell, se separan (4) y (5) en sus componentes rectangulares:

$$\partial_t E_x = (\partial_y H_z - \partial_z H_y - \sigma E_x) / \varepsilon \quad (6)$$

$$\partial_t E_y = (\partial_z H_x - \partial_x H_z - \sigma E_y) / \varepsilon \quad (7)$$

$$\partial_t E_z = (\partial_x H_y - \partial_y H_x - \sigma E_z) / \varepsilon \quad (8)$$

$$\partial_t H_x = (\partial_z E_y - \partial_y E_z - \sigma^* H_x) / \mu \quad (9)$$

$$\partial_t H_y = (\partial_x E_z - \partial_z E_x - \sigma^* H_y) / \mu \quad (10)$$

$$\partial_t H_z = (\partial_y E_x - \partial_x E_y - \sigma^* H_z) / \mu \quad (11)$$

Considerando las ecuaciones (2),(3) y (6-11) y en base a la Fig. 1, obtenemos las ecuaciones de Maxwell discretas y lineales usadas en los cálculos con el MDFDT:

$$E_x^{n+1}(i, j, k) = \left(\frac{2\varepsilon(i, j, k) - \sigma(i, j, k)\Delta t}{2\varepsilon(i, j, k) + \sigma(i, j, k)\Delta t} \right) E_x^n(i, j, k) + \left(\frac{2\Delta t}{2\varepsilon(i, j, k) + \sigma(i, j, k)\Delta t} \right) \cdot \left(\frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j - \frac{1}{2}, k)}{\Delta y} - \frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k + \frac{1}{2}) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k - \frac{1}{2})}{\Delta z} \right), \quad (12)$$

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) = \left(\frac{2\mu(i, j, k) - \sigma^*(i, j, k)\Delta t}{2\mu(i, j, k) + \sigma^*(i, j, k)\Delta t} \right) H_y^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k) + \left(\frac{2\Delta t}{2\mu(i, j, k) + \sigma^*(i, j, k)\Delta t} \right) \cdot \left(\frac{E_z^n(i + \frac{1}{2}, j, k) - E_z^n(i - \frac{1}{2}, j, k)}{\Delta x} - \frac{E_x^n(i, j, k + \frac{1}{2}) - E_x^n(i, j, k - \frac{1}{2})}{\Delta z} \right), \quad (13)$$

$$E_z^{n+1}(i, j, k) = \left(\frac{2\varepsilon(i, j, k) - \sigma(i, j, k)\Delta t}{2\varepsilon(i, j, k) + \sigma(i, j, k)\Delta t} \right) E_z^n(i, j, k) + \left(\frac{2\Delta t}{2\varepsilon(i, j, k) + \sigma(i, j, k)\Delta t} \right) \cdot \left(\frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j, k)}{\Delta x} - \frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j - \frac{1}{2}, k)}{\Delta y} \right), \quad (14)$$

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) = \left(\frac{2\mu(i, j, k) - \sigma^*(i, j, k)\Delta t}{2\mu(i, j, k) + \sigma^*(i, j, k)\Delta t} \right) H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k) + \left(\frac{2\Delta t}{2\mu(i, j, k) + \sigma^*(i, j, k)\Delta t} \right) \cdot \left(\frac{E_y^n(i, j, k + \frac{1}{2}) - E_y^n(i, j, k - \frac{1}{2})}{\Delta z} - \frac{E_z^n(i, j + \frac{1}{2}, k) - E_z^n(i, j - \frac{1}{2}, k)}{\Delta y} \right), \quad (15)$$

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) = \left(\frac{2\mu(i, j, k) - \sigma^*(i, j, k)\Delta t}{2\mu(i, j, k) + \sigma^*(i, j, k)\Delta t} \right) H_y^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k) + \left(\frac{2\Delta t}{2\mu(i, j, k) + \sigma^*(i, j, k)\Delta t} \right) \cdot \left(\frac{E_z^n(i + \frac{1}{2}, j, k) - E_z^n(i - \frac{1}{2}, j, k)}{\Delta x} - \frac{E_x^n(i, j, k + \frac{1}{2}) - E_x^n(i, j, k - \frac{1}{2})}{\Delta z} \right), \quad (16)$$

$$H_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) = \left(\frac{2\mu(i, j, k) - \sigma^*(i, j, k)\Delta t}{2\mu(i, j, k) + \sigma^*(i, j, k)\Delta t} \right) H_z^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k) + \left(\frac{2\Delta t}{2\mu(i, j, k) + \sigma^*(i, j, k)\Delta t} \right) \cdot \left(\frac{E_x^n(i, j + \frac{1}{2}, k) - E_x^n(i, j - \frac{1}{2}, k)}{\Delta y} - \frac{E_y^n(i + \frac{1}{2}, j, k) - E_y^n(i - \frac{1}{2}, j, k)}{\Delta x} \right). \quad (17)$$

De las ecuaciones anteriores podemos concluir que la célula de Yee tiene las siguientes características:

- Las expresiones en diferencia finita de las derivadas espaciales usadas en los operadores rotacionales son diferencias centrales de segundo orden de exactitud.

- La continuidad de los componentes tangenciales \vec{E} y \vec{H} se mantienen de manera natural a través de una interface de materiales distintos si la interface es paralela a uno de los ejes coordenados de la célula;
- Al inicio del problema se especifica simplemente la permitividad, permeabilidad y conductividad de los materiales, en cada posición de los componentes de campo, lo que conduce a una aproximación "escalonada" de la superficie y geometría interna de la estructura, con una resolución espacial determinada por el tamaño de la celda unitaria.
- Para que la solución sea posible, es necesario que se delimite el espacio en que se realiza el proceso.

2.3. Espacio de cómputo

El espacio de cómputo está definido por un número discreto de células de Yee, tantas como la solución del problema requiera y tantas como los recursos de cómputo lo permitan. La Fig. 2 muestra el espacio de cómputo típico:

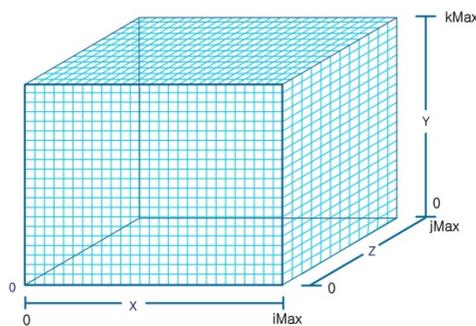


Fig. 2. Espacio de cómputo del MDFDT.

Cada célula del espacio de cómputo contiene las características del medio en ese punto particular. Durante el proceso de cómputo, se calcula el valor del campo en un intervalo de tiempo posterior y en la celda correspondiente, a partir del campo existente en tiempo y espacio en las celdas contiguas, usando las ecuaciones del algoritmo de Yee.

2.4. Limitación del espacio de cómputo

Aunque en gran cantidad de problemas tecnológicos, donde la interacción de campos electromagnéticos es la base fundamental de operación, se requiere que la solución se calcule en espacios abiertos, es decir, obtener la solución en espacios no limitados. Para una técnica numérica este es un proceso difícil ya que la memoria de las computadoras y el tiempo de procesamiento son finitos. Para resolver esta limitación el MDFDT requiere delimitar el espacio de cómputo; las técnicas numéricas usadas en este proceso se han denominado como condiciones de frontera absorbentes (ABC por las siglas en inglés Absorbing Boundary Conditions); estas técnicas tienen el objetivo de absorber los campos electromagnéticos incidentes cuando éstos llegan a la frontera de la malla numérica. Se han desarrollado varias técnicas para implementar condiciones de frontera absorbentes, como son el esquema de diferencias finitas de Mur, propuesta por Gerrit Mur [5], el modelo de ecuación de onda unidireccional de Engquist-Majda y el modelo de capas perfectamente acopladas de Jean Pierre Bérenger.

La condición de frontera absorbente más empleada por su versatilidad así como por su eficiencia es el modelo de capas perfectamente acopladas, conocidas como capa PML por sus siglas en inglés. Esta condición de frontera de absorción se caracteriza por la descomposición del campo y el empleo de conductividad en las capas numéricas para la absorción de los campos electromagnéticos.

En general las técnicas de condiciones de frontera absorbentes son empleadas según la naturaleza del problema y el nivel de precisión que se desea. A nivel de RF y microondas se han usado ampliamente todas las técnicas ya mencionadas con un nivel de precisión aceptable, sin embargo siempre se ha buscado mejorar las características de absorción. Un ejemplo de este tipo, que los autores han trabajado, es el modelado numérico de la interacción de campos electromagnéticos con estructuras nanométricas los niveles de campo a nivel molecular son tan pequeños que podrían confundirse con los niveles de campo reflejados por la capa de absorción, por lo que es necesario trabajar con un nivel de precisión muy grande en la simulación. Este nivel de precisión se obtiene por medio

de las condiciones de frontera de absorción, y para este propósito hemos desarrollado una técnica optimizada de implementación del modelo de capas perfectamente acopladas propuesto por Berenguer, por medio de la cual se obtienen niveles de error inferiores a 10^{-12} . Aunque el proceso implica una gran cantidad de recursos de cómputo, hemos adoptado esta técnica, que no se describe en su totalidad por razones de espacio, pero puede consultarse en la literatura [6].

La técnica PML fue propuesta por Jean-Pierre Berenger en 1994 [7] cuya finalidad es la de resolver los problemas de electromagnetismo en áreas abiertas evitando al máximo las ondas reflejadas al llegar a la frontera de cálculo cuando se utiliza el método de diferencias finitas.

El procedimiento de Berenger se describe como sigue: primero se coloca una capa dividida en ocho regiones, acoplada perfectamente alrededor de la región de cálculo capaz de absorber las ondas electromagnéticas que incidan en ella mediante la igualación de la impedancia de la región de análisis con la de la capa PML. Enseguida se descompone el componente transversal de campo de tal manera que en la capa PML sólo sean absorbidos todos los campos que inciden de manera normal. Esta absorción se efectúa por medio de valores de conductividad distribuidos ordenadamente en la región de capa PML. Finalmente la capa PML debe terminar en un conductor eléctrico perfecto que refleja los campos que alcanzaron a llegar al final de la región de cálculo para que sean absorbidos al pasar de nuevo por la región de capa PML antes de reingresar a la región de análisis.

El esquema de implementación de la condición de frontera de absorción de capa perfectamente acoplada se muestra en la siguiente Fig. 3.

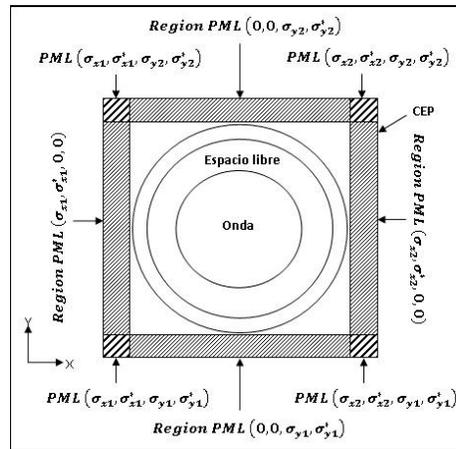


Fig. 3. Esquema de implementación de Berenger.

Aunque la demostración teórica del funcionamiento de la capa perfectamente acoplada se puede encontrar íntegra en el artículo original de Berenger, el planteamiento lleva a ecuaciones de diferencias finitas en el dominio del tiempo que delimitan la región de cómputo.

2.5. Condiciones de estabilidad usando el escalonado espacial y temporal

Una onda electromagnética no puede propagarse a una velocidad mayor que la luz. Por eso, simular la propagación del campo de celda en celda, requiere un tiempo mínimo dado por $\Delta t = \Delta x / c_0$. Cuando se simula en dos dimensiones, la propagación requiere un tiempo de $\Delta t = \Delta x / \sqrt{2}(c_0)$. Consecuentemente en tres dimensiones la simulación requiere de $\Delta t = \Delta x / \sqrt{3}(c_0)$. Estas expresiones se pueden resumir en la *Condición de Courant*:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{n} \cdot c_0} \quad (18)$$

donde n es el número de dimensiones de la simulación.

Para la determinación del tamaño de la célula en el dominio espacial, se debe considerar que para obtener resultados significativos en contenido de frecuencia, esta debe ser solo una fracción de la longitud de onda de la más alta frecuencia significativa de la fuente de excitación. Se debe escoger bien el tamaño de la celda que se va a utilizar en el MDFDT, ya que deben tomarse puntos de muestreo suficientes para asegurar que la representación es adecuada. Aunque muchos autores recomiendan tomar diez muestras por longitud de onda, en la mayoría de nuestros trabajos hemos considerado tomar veinte muestras por longitud de onda, es decir $\Delta x = \frac{\lambda_0}{20}$. Sin embargo debe quedar claro que esto depende en gran medida de otros factores, como la forma geométrica de ciertos dispositivos. Por ejemplo un tamaño de célula de $\lambda/99$ se requiere para modelar detalles geométricos muy finos como en la antena Vivaldi. Por otro lado, es importante enfatizar que existe un compromiso entre el tamaño de la célula y los recursos computacionales disponibles.

3. Resultados

El procedimiento computacional descrito nos ha permitido desarrollar una gran cantidad de experimentos, usados tanto para la enseñanza como para la investigación, desde la simulación de una onda electromagnética en un medio con diferentes obstáculos, que permiten mostrar a los estudiantes los fenómenos más comunes de la propagación, como son la reflexión y refracción; igualmente la distribución de campo electromagnético en guías de onda planas o rectangulares con ranuras. En la parte de investigación, hemos usado MDFDT para mostrar cómo se propaga el campo en medios cerrados, que es uno de los problemas actuales en las comunicaciones celulares, el método demostró ser mejor que los que actualmente se usan en el modelado de este fenómeno. Igualmente el MDFDT, lo hemos usado para modelar los efectos del campo electromagnético a nivel

nanométrico para analizar sus efectos sobre la materia y el efecto de ésta sobre el campo. En los párrafos que siguen se describen algunos de los ejemplos mencionados.

3.1. Propagación en medios con diferentes materiales

En las figuras siguientes mostramos la simulación de los efectos principales en medios con obstáculos de diferentes materiales. Aunque en estas gráficas solo se observa un instante de tiempo, para la enseñanza del electromagnetismo, la imagen tiene movimiento y el profesor muestra cómo es su comportamiento en el tiempo.

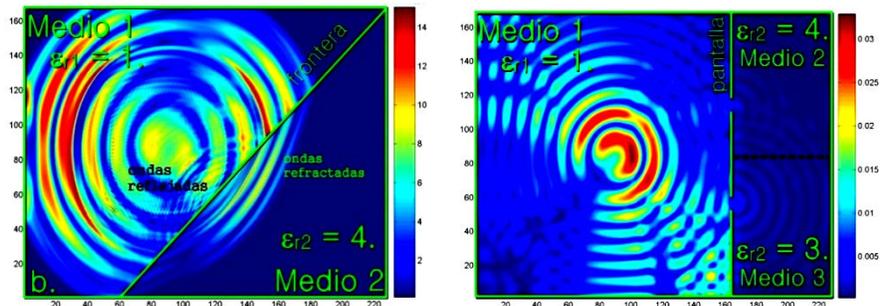


Fig. 4. Reflexión, refracción y difracción de ondas electromagnéticas.

En la figura de la izquierda es posible observar cómo la onda que incide en un medio con diferentes características genera reflexiones que afectan la onda incidente, si se analiza el medio 2 se observa que la longitud de onda cambia y que el frente de onda modifica su dirección de propagación, debido al efecto de refracción. En la otra figura se observa el efecto de difracción, cuando la onda incide sobre un obstáculo con dos ranuras, se nota por un lado el efecto de reflexión en el medio 1 y el proceso de interferencia cuando la energía pasa a través de las ranuras, en el medio 2. La Fig. 6 muestra los efectos de

una onda que choca contra materiales dieléctricos (izquierda) y la cuando la onda incide en una ferrita, que es un material ferromagnético (derecha)

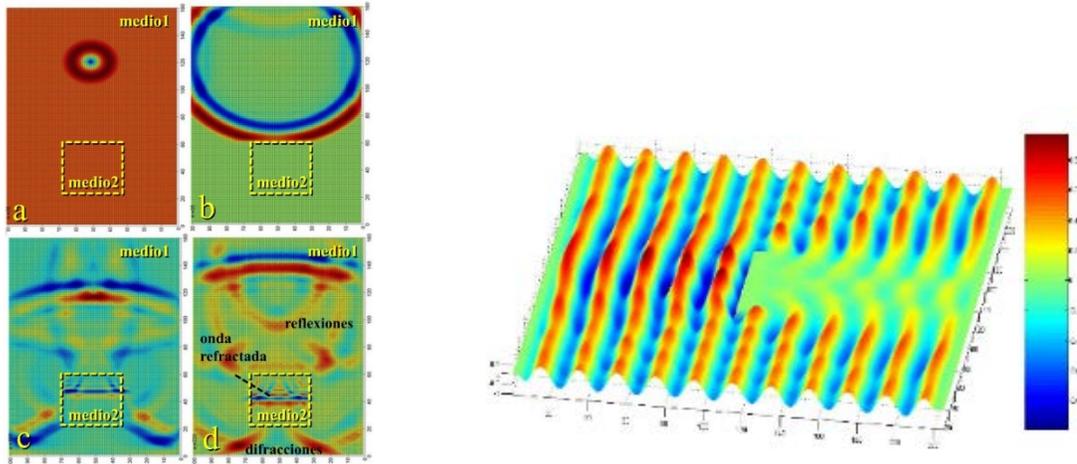


Fig. 6. Efectos sobre dieléctricos y una ferrita.

3.2. Antena ranurada sobre una guía de onda [8]

El método nos ha permitido simular cómo se propaga el campo en una guía de onda y qué pasa cuando se insertan ranuras en ella, para generar campo hacia afuera. La Fig. 7 muestra el esquema de la guía y las Figs. 8 y 9 la distribución de campo en la frontera entre la guía y el medio y el patrón de radiación obtenido.

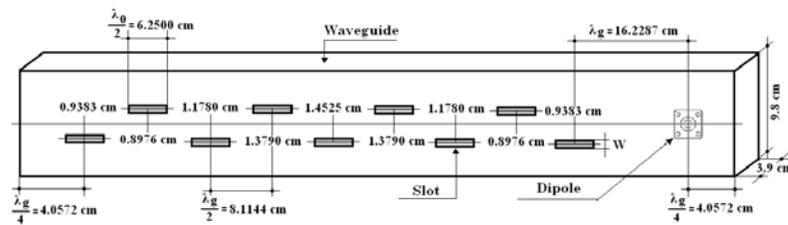


Fig. 7. Guía de onda ranurada.

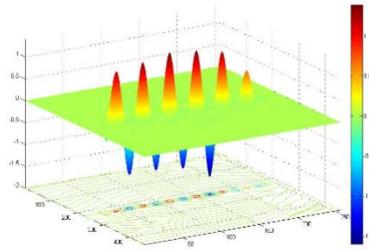


Fig. 8. Campo radiado fuera de la guía.

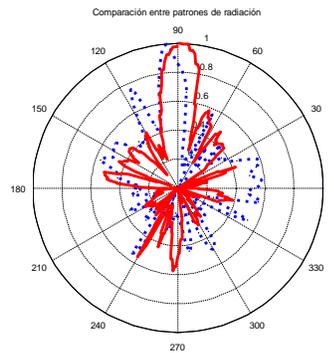


Fig. 9. Patrón de radiación.

Mediante el MDFDT es posible no sólo observar el comportamiento, sino que se obtiene una base de datos puntual sobre el valor del campo electromagnético en el espacio de cómputo y por tanto hacer gráficas de patrón de radiación como en la Fig. 9, que también muestra en azul el campo medido, que se usó para comparar la simulación con la realidad.

3.3. Distribución de campo en recintos cerrados [9]

Uno de los experimentos que realizamos usando el MDFDT fue la caracterización de la distribución de campo, cuando es radiado dentro de oficinas, en las que se substituye cada mueble y estructura por sus características de permitividad, permeabilidad y

el efecto en espacio sin obstáculos y alguna reflexión cerca de la fuente, que presenta un color rojo intenso. La simulación en rojo se compara con la medición en azul y también con el cálculo de uno de los modelos (en verde) que se usan actualmente para predecir propagación en recintos cerrados. Es clara la enorme diferencia entre ambos modelos.

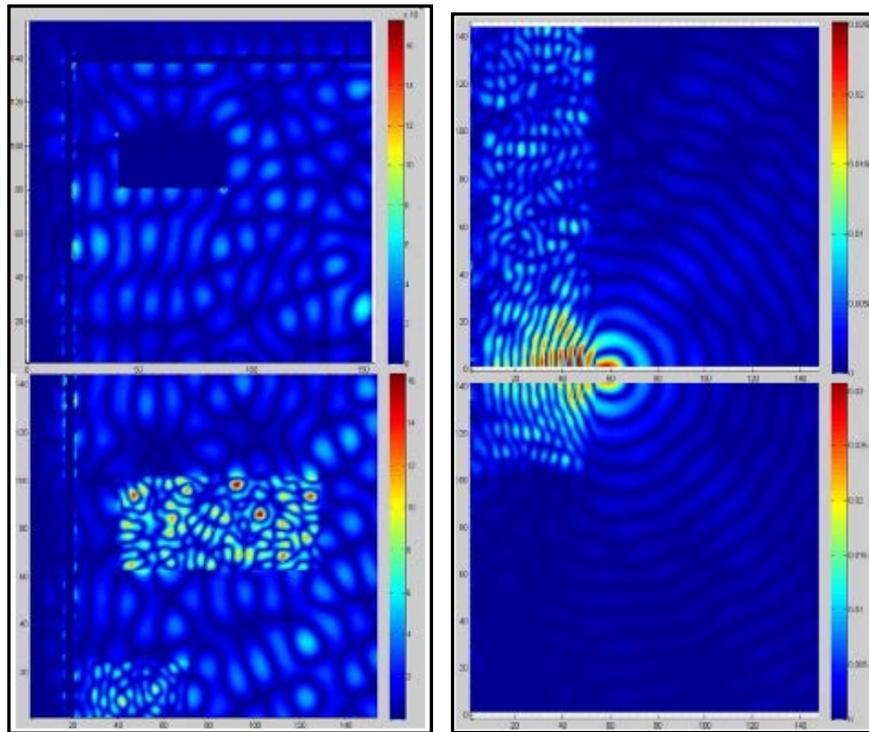


Fig. 12. Distribución de campo en algunas zonas del área de estudio.

3.4. Simulación en dimensiones nanométricas [10]

Otro experimento que desarrollamos fue el análisis del efecto del campo electromagnético sobre la materia, en frecuencias cuya longitud de onda es comparable con las dimensiones de una molécula de oro. Esto es en frecuencias de Terahertz, con longitudes de onda de 10^{-9} m. Para realizar el experimento las ecuaciones de Maxwell fueron modificadas para introducir efectos relativísticos. Los resultados se presentan a continuación.

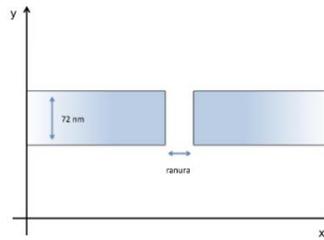


Fig. 13. Esquema de medición.

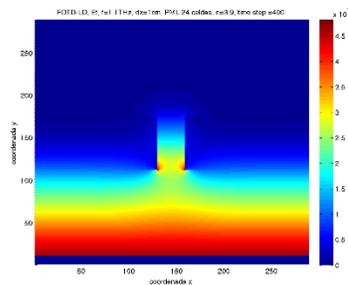


Fig. 14. Onda incidente en ranura de 1 nm.

En el experimento una onda plana se hace incidir sobre una placa de oro con una ranura de dimensiones nanométricas, como muestra el esquema de la Fig. 13. Uno de los resultados de la simulación se presenta en la Fig. 14, en donde se observa un reforzamiento del campo en las esquinas inferiores de la ranura, debido a la presencia del efecto relativístico de plasmones.

4. Conclusiones

El MDFDT es una poderosa herramienta que puede ser muy útil en la enseñanza del electromagnetismo; mostrar los efectos de propagación, analizar los procesos de reflexión, refracción y difracción, mediante imágenes fijas o en movimiento facilita la

comprensión del fenómeno. Pero el método ha sido para los autores de mucha utilidad en sus trabajos de investigación; muchos análisis y diseños han sido desarrollados usando este procedimiento, nuestro trabajo no se ha limitado simplemente en programarlo sino en la búsqueda de hacer más eficiente el uso de los recursos de cómputo, incluso trabajando con *cómputo paralelo*, en donde hemos encontrado beneficios pero también limitaciones.

En este trabajo presentamos algunos resultados de los experimentos que hemos desarrollado, podríamos resaltar el de propagación en recintos cerrados que superan ampliamente los métodos que actualmente se usan en la predicción del día a día. Entender los beneficios del método, es una tarea que los autores y sus alumnos prueban todos los días, con ideas que amplían las aplicaciones y por tanto el conocimiento.

6. Referencias

- [1] Allen Taflove, Melinda Piket-May, John Baron, FDTD Modeling of Digital Signal Propagation in 3-D Circuits with Pasive and Active Loads, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, Vol. 42 No. 8, August 1994.
- [2] Alberto M. Benavides C., Análisis de campo en guías de onda y resonadores rectangulares en el modo TE utilizando el método de diferencias finitas en el dominio del tiempo. Tesis de maestría, ESIME ZACATENCO, 2001. (Director: Jorge Sosa Pedroza)
- [3] Kane S. Yee, Numerical Solution of Initial Boundary Value Poblems Involving Maxwuell´s Equations in Isotropic Media, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, May 1966.
- [4] Matthew, N.O. Sadiku, Numerical Techniques in Electromagnetics, CRC Press,

- [5] Jorge Sosa Pedroza, Manuel Benavides, "Simulaciones de Frontera de Mur y Taflove en el Método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo" CIECE 2000, Aguascalientes Ags. México, Marzo 2000.
- [6] Taflove & Hagness, *Computational Electrodynamics*, Artech House, 2000.
- [7] Jean-Pierre Berenger, A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves, *Journal of Computational Physics*, Vol 114, pp 185-200, 1994.
- [8] Jorge Sosa Pedroza, Manuel Benavides Cruz, Jafeth Alonso Carreón "Campo de radiación de una antena ranurada de 8 elementos usando el MDFDT, ROC&C IEEE 2007, Acapulco Guerrero, Noviembre 2007.
- [9] Salvador Coss Domínguez, Caracterización de propagación en recintos cerrados usando el MDFDT. Tesis de maestría, ESIME ZACATENCO, 2012. (Director: Jorge Sosa Pedroza)
- [10] Alberto M. Benavides C., "Análisis del efecto del campo electromagnético sobre estructuras nanométricas usando el MDFDT" Tesis de Doctorado, ESIME ZACATENCO, 2012. del nombre

7. Autores

Dr. Jorge R. Sosa Pedroza, Profesor-Investigador Titular de tiempo completo de la ESIME-IPN de 1973 a la fecha. Ingeniero en Comunicaciones y Electrónica de la ESIME IPN, con estudios de Maestría en Ciencias con especialidad en Telecomunicaciones en la Sección de Posgrado de la ESIME y doctorado en Telecomunicaciones por la misma institución.

M. en C. Fabiola Martínez Zúñiga, Profesora-Investigadora de la ESIME-IPN de 2003 a la fecha. Ingeniera en Comunicaciones y Electrónica, con una Maestría en Ciencias con especialidad en Telecomunicaciones en la Sección de Posgrado de la ESIME. Profesora Titular de las academias de Electromagnetismo y Comunicaciones.

Ing. Esteban Cerda Palma estudiante de la maestría en Telecomunicaciones ESIME IPN