

# La influencia de GeoGebra en la exploración de algunas propiedades de las transformaciones geométricas

**David Silva Bautista**

**Claustro Universitario de Oriente**

*dsilva\_b@yahoo.com.mx*

## RESUMEN

Este estudio forma parte de una investigación en curso sobre la interpretación de los estudiantes de bachillerato en las transformaciones geométricas llamadas isometrías mediante la exploración de sus propiedades utilizando el software *Geogebra*, el cual contiene una caja de herramientas especial para esos fines. Todas las respuestas que se piden en esta secuencia, deben darse a partir de la exploración por manipulación directa de los objetos geométricos que permite realizar el software, y de la observación de lo que sucede en la pantalla cuando se arrastran los elementos que son independientes en la construcción. Pretendemos buscar una relación entre las concepciones de los alumnos y las técnicas que utilizan en las estrategias de resolución de problemas.

**PALABRAS CLAVE.** Geometría plana, Isométricas, Geometría dinámica, resolución de problemas, instrumentación e instrumentalización.

## 1. INTRODUCCIÓN

La utilización de entornos tecnológicos computarizados se ha incrementado y popularizado para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, particularmente en álgebra y geometría (ver, por ejemplo, Ball y Stacey, 2003; Kieran y Saldanha, 2005;

Kieran y Drijvers, 2006). Sin embargo, algunos investigadores reportan ventajas y desventajas de estas herramientas tecnológicas (Olive et al, 2010; Hoyos, 2009).

En relación con el aprendizaje de la geometría, Hohenwarter yPreiner, (2007) señalan que el Software de Geometría Dinámica (SGD) ha potenciado la comprensión de los conceptos geométricos de los estudiantes. Argumentan que discutir sobre la forma en que el SGD presenta los resultados promueve un entendimiento profundo de los conceptos geométricos involucrados.

Este trabajo de investigación se propuso conocer y analizar cuáles son las estrategias de transformación geométrica (isometrías) que desarrollan los estudiantes de bachillerato.

Se buscó la participación de estudiantes de quinto semestre de bachillerato (de la Escuela Comercial Cámara de Comercio de la Ciudad de México) para instrumentar actividades de enseñanza, en las cuales se usó Geogebra. Este software sirvió para validar sus transformaciones y como medio facilitador para la comprensión de las nociones geométricas de las isometrías.

En este trabajo también se pretendió observar el grado de instrumentación e instrumentalización (Drijvers y Trouche, 2008; Iranzo y Fortuny, 2009) de los estudiantes cuando utilizaron Geogebra en las actividades propuestas.

Las tareas de los estudiantes consistieron en transformar las isometrías (traslación, rotación, reflexión, simetría axial y central, etc.) con Geogebra con el propósito de analizar la relación que existe entre las transformaciones geométricas producidas y, de esta manera, descubrir las nociones isométricas. De manera sintética se puede decir que Geogebra se usó como herramienta para obtener datos, que luego se registraron en las hojas de trabajo.

El análisis de los datos nos permitió ver la funcionalidad del ambiente tecnológico de aprendizaje Geogebra en la transformación de las nociones geométricas del estudiante y reconocer que los estudiantes pueden desarrollar un pensamiento matemático distinto bajo la utilización de ambientes de aprendizaje de este tipo. Si bien estos ambientes no suplen a las clases comunes de matemáticas, sí las complementan, y por consiguiente, se avanza en la posibilidad de obtener un aprendizaje significativo (ver, Moreno y Waldegg, 2004).

## 2.1 PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

¿Qué influencia tiene el uso de Geogebra en las estrategias de resolución de los estudiantes y en la comprensión de conceptos?

¿Qué aporta a los estudiantes el uso de Geogebra en las transformaciones geométricas?

## 2.2 OBJETIVOS

Analizar los procesos de instrumentación e instrumentalización para esbozar diferentes tipologías de estudiantes.

Explorar la influencia del uso de Geogebra en la adquisición de conocimiento, visualización y pensamiento estratégico de los estudiantes.

## 3. MARCO TEÓRICO

Drijvers y Trouche (2008) sostienen que un acto instrumental incluye (según Vygotsky) un problema que se quiere resolver, procesos mentales involucrados en la resolución y herramientas psicológicas usadas para realizar y coordinar esos procesos.

Estos autores le atribuyen un rol activo a las herramientas que influyen en los procesos mentales. Señalan que en la transición de artefacto a instrumento, el artefacto es la herramienta desnuda, el objeto material o abstracto, disponible para el usuario para dar soporte a una actividad, no obstante puede ser un objeto carente de significado, en la medida en que el usuario no conoce la clase de tareas que el objeto puede soportar.

Sólo después de que el usuario llega a ser consciente de cómo el artefacto puede extender sus propias capacidades para resolver una tarea relevante, y después de que el usuario ha desarrollado significados del uso del artefacto en ese propósito específico, el artefacto llega a ser parte de un instrumento valioso y útil que media la actividad (Drijvers y Trouche, 2008, 367). Dichos autores mencionan que Raberdel (2001) habla de *instrumento* cuando existe una relación significativa entre el artefacto y el usuario para tratar con cierto tipo de tareas que el usuario pretende resolver. Desde la perspectiva del acto instrumental (Vygotsky) los procesos mentales del usuario, el artefacto y la tarea forman parte de un todo.

En el caso de las herramientas matemáticas Drijvers y Trouche (2008) dicen que pueden considerarse como extensiones de la mente y como procesos mentales esenciales. Por lo tanto, el instrumento consta tanto del artefacto como de los esquemas mentales que el usuario desarrolla para utilizarlo en la realización de tareas específicas.

En resumen: INSTRUMENTO = ARTEFACTO + ESQUEMA para una clase de tareas. La pregunta es: *¿Cómo la disponibilidad de un artefacto puede conducir al desarrollo de un instrumento?*

En el proceso de apropiación del instrumento por el usuario: éste tiene que desarrollar esquemas mentales que involucren habilidades para usarlo de forma eficiente y conocimiento de las circunstancias en las que es útil. Así el artefacto deviene en instrumento mediando la actividad en la *génesis instrumental* (GI).

El proceso de *instrumentación* consiste en desarrollar formas para realizar una tarea, mismas que son alentadas por las características inherentes del artefacto. Mientras que otras formas de utilización son desalentadas, por la misma razón (e.g. el uso de Geogebra para la construcción de transformaciones geométricas). La *instrumentalización* se desarrolla en la medida en que el usuario hace un uso más personal del artefacto, dándole un carácter definido.

Por un lado el artefacto da forma a unos esquemas mentales en el usuario, y estos mismos esquemas también definen al artefacto. “La *GI*, por lo tanto, involucra el desarrollo de Esquemas Mentales (EM), los cuáles organizan la estrategia de Resolución de Problemas (RP) e inducen los conceptos que fundamentan las estrategias. Al mismo tiempo, las técnicas co-evolucionan, constituyéndose en medios eficaces para la realización de las tareas involucradas”.

Las preguntas ahora, son: ¿qué es un esquema? y ¿cómo podemos identificarlo y observar su desarrollo? En el caso de un problema matemático, un esquema mental involucra una estrategia global de solución, los medios que el artefacto ofrece y los conceptos matemáticos que apuntalan la estrategia. La relación de la co-evolución técnica y los elementos conceptuales en un EM es característica de la GI. Como consecuencia el trabajo técnico con el artefacto está conectado al entendimiento conceptual. Esto debe ser explotado para el aprendizaje.

Drijvers y Trouche (2008, 370) continúan mencionando que hay dos tipos de esquemas de utilización (euz): *Esquemas de uso (eus)* y *esquemas de acción instrumentada (eai)*. Los primeros son esquemas básicos de uso de una herramienta (por ejemplo, el arrastre de objetos en un SGD o construir una tabla dinámica).

Cuando varios esquemas de utilización se articulan para dar solución a una tarea compleja se genera un eai, a través del cual es posible identificar los invariantes de una figura o es posible acotar la solución de una ecuación.

Para estos autores las dificultades que experimentan los estudiantes con las herramientas de graficación se deben a que sus esquemas conceptuales están incompletos, más que a las dificultades técnicas que el uso de la herramienta presenta. Puede ser que lo que en principio se muestra como un eai, más adelante se manifieste como un esquema de uso para dar lugar a eai de orden superior en el caso de un usuario en particular. Los euz involucran un interjuego entre actuar y pensar e integran técnicas propias del uso de una máquina y conceptos mentales.

En el caso de las herramientas tecnológicas para el aprendizaje de matemáticas, la parte conceptual de los euz incluye tanto objetos matemáticos como una comprensión profunda de las “matemáticas de la máquina”. En consecuencia, aparentemente los obstáculos técnicos que los estudiantes experimentan, resultan tener antecedentes conceptuales importantes (Drijvers y Trouche, 2008, 371).

La dificultad es que no podemos observar EM directamente. Nuestras observaciones se limitan a técnicas que los estudiantes realizan con el artefacto y a la forma en que reportan esto de manera oral o escrita. De estos datos tratamos de construir los esquemas, pero no hay que perder de vista que se trata sólo de nuestras propias reconstrucciones. Además la construcción de esquemas no es inequívoca, los estudiantes pueden construir esquemas inapropiados o ineficientes o que estén basados en concepciones inadecuadas.

Publicaciones como Artigue (1997), (2002), Lagrange (2000), (2005), Trouche (2000), (2004 a, b) y Guin et al. (2004) demuestran lo valioso que es el enfoque instrumental para el entendimiento de las interacciones de estudiante-SGD y su influencia en la enseñanza y el aprendizaje. Esto no sólo se ha aplicado a la integración de CAS en el aprendizaje

de las matemáticas, sino también para el uso de hojas de cálculo (Haspekian, 2005) y los sistemas de geometría dinámica (Falcade, 2003).

En este estudio exploratorio, luego de examinar el trabajo de Iranzo y Fortuny (2009) y el de Drijvers y Trouche (2008), definimos los grados de adquisición de habilidades, técnicas concernientes a los procesos de instrumentación e instrumentalización (tablas 1 y 2) de los estudiantes en el contexto de las actividades propuestas. Nuestro método de identificación y caracterización de los comportamientos matemáticos de los alumnos se basa en la interpretación de los datos.

En el análisis de las producciones de los estudiantes con Geogebra, consideraremos las distintas finalidades que pueden tener cuando utilizan acciones de transformación geométrica. Éstas se presentan en las siguientes tablas 1 y 2.

Alto	Los estudiantes conocen las posibilidades de Geogebra (uso de herramientas, teclado...) y no tienen dificultades en el uso del software. Transformación de comandos en acciones geométricas.
Medio	Uso del artefacto de acuerdo con un objetivo (por ejemplo, uso del arrastre de test para validar una figura).
Bajo	Uso de pocos comandos para las transformaciones geométricas elementales. Dificultades técnicas para aplicar comandos (sintaxis, orden).

Tabla 1. Grados de instrumentación.

Alto	Coordinan el uso de la ventana geométrica y algebraica y utilizan conocimiento geométrico. Internalización de los comandos (modo desplazar, uso de macros, etc.).
Medio	Coordinan el uso de la ventana algebraica y geométrica. Aparición de inferencias figúrales.
Bajo	Los estudiantes se basan principalmente en propiedades de medida y no consideran propiedades geométricas.

Tabla 2. Grados de instrumentalización.

En nuestro trabajo de investigación definimos grados de adquisición de habilidades técnicas concerniendo los procesos de instrumentación e instrumentalización en el contexto de los problemas propuestos (Tablas 1 y 2).

Para la consecución de nuestros objetivos, tomamos en cuenta las siguientes variables: Sus estrategias heurísticas (se remiten a propiedades geométricas, se basan en el uso de herramientas geométricas, hacen uso de ambas, estrategias de resolución, etc.); La influencia del software Geogebra (visualización, conceptos geométricos, superación de obstáculos); Sus características cognitivas (información proporcionada por el profesor y por la experimentación) y los obstáculos encontrados en este medio (conceptuales, geométricos, de visualización, técnicos, etc.).

#### **4. METODOLOGÍA**

Esta investigación es llevada a cabo desde una perspectiva cualitativa-interpretativa.

El estudio exploratorio se realizó de diciembre de 2012 a febrero del 2013 en la Escuela Comercial Cámara de Comercio, ubicada en la zona urbana del Distrito Federal. Fueron treintaiséis escolares participantes en el experimento, ya que se consideró a todos los integrantes del grupo que cursaban el quinto semestre de bachillerato en el turno matutino. Sus edades variaban entre los 16 y 18 años. No hubo selección de acuerdo a su desempeño (alto, medio y bajo).

Los instrumentos que se utilizaron para recabar la información fueron: archivos electrónicos (en Word) de trabajo para cada una de las actividades que los estudiantes contestaron de forma individual y en equipos, notas tomadas al término de algunas sesiones, sobre todo relacionadas con las discusiones de los estudiantes para justificar sus soluciones, archivos del trabajo realizado por los alumnos al usar el software Geogebra y registro en videos de las sesiones de trabajo. Las sesiones de trabajo se llevaron a cabo en el laboratorio de cómputo, donde se utilizó el software Geogebra.

Este estudio se desarrolló en seis sesiones, cada sesión tuvo una duración de 50 minutos, esto es, lo que dura cada una de las clases en bachillerato.

Laborde (1992) señala que una tarea resuelta usando un software de geometría dinámico podría requerir estrategias diferentes que las que requiere la misma tarea resuelta con lápiz y papel. La elección de una u otra herramienta también tiene repercusión en la retroalimentación (feedback) que el alumno recibe.

El juego de actividades que hemos dispuesto y el orden de implementación de estas aparecen a continuación:

Se comenzó explorando la transformación geométrica llamada Traslación. Note que en este primer segmento de la secuencia de trabajo, todas las preguntas aparecen ya con respuestas *típo*. De tal manera que se espera que a partir del ejercicio 2, el estudiante responda todas las preguntas que se le hacen de manera similar a lo mostrado en el primer ejercicio.

## 4.1 PROCEDIMIENTO

### Introducción al conocimiento de las diferentes isometrías

#### 1. Traslación.

- Construye un segmento AB.
- Construye el segmento A'B', el trasladado de AB, utilizando la herramienta **Traslación** (“**Traslada objeto acorde a vector**”) de la caja de Transformaciones Geométricas de Geogebra...Pero, ¿qué objetos son necesarios para la construcción?

#### Respuesta:

Observa que al seleccionar la herramienta Traslación (disponible en el octavo botón), se lee, en la segunda barra gris de la pantalla y a un lado de los botones que señalan las diferentes cajas de herramientas, “**Traslada objeto acorde a vector**”. Debajo de este texto aparece la explicación “Objeto a trasladar, luego vector”. Esto significa que requerimos de un objeto, el segmento AB en este caso, y de un vector, por ejemplo el vector OP. Después de que hayas creado el vector OP, efectúa la traslación del segmento AB.

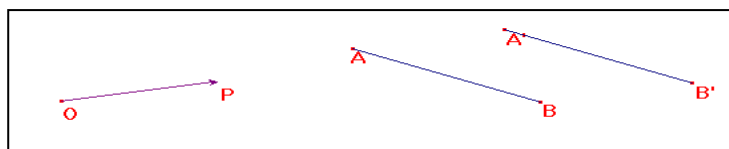


Figura 1

- ¿Cuáles objetos geométricos puedes mover o variar arrastrándolos con el ratón? ¿Por qué?



**Respuesta:**

Podemos mover,

- el segmento  $AB$ ,
- los puntos  $A$  y  $B$ , cambiando así la longitud del segmento  $AB$ ,
- el vector  $OP$ ,
- el punto  $O$ , origen del vector, y el punto terminal  $P$ , con lo cual varían la norma, la dirección y el sentido del vector.

Estos objetos se pueden mover porque son objetos de base (libres).

No podemos arrastrar el segmento  $A'B'$ , debido a que depende de los objetos libres que han servido para construirlo, es decir, depende del segmento  $AB$  y del vector  $OP$ .

e) ¿Qué es lo que sucede cuando hacemos variar o movemos los objetos geométricos a los que se hace referencia en la primera columna de la tabla 3?

Si movemos / variamos ...	Entonces ...
El vector $OP$	No se mueve nada más
$O$ , o $P$	El segmento $A'B'$ se mueve manteniéndose paralelo a $AB$ , sin cambiar su longitud, pero variando la distancia al segmento $AB$ . Los segmentos $AA'$ y $BB'$ se mantienen paralelos a $OP$ .
El segmento $AB$	el segmento $A'B'$ se mueve conservando su posición respecto a $AB$ y conservando su longitud.
$A$	Se mueve $A'$ y el segmento $A'B'$ se mantiene paralelo y a la misma distancia de $AB$ , y sin variar su longitud. Los segmentos $AA'$ y $BB'$ se mantienen paralelos a $OP$ .
$B$	Se mueve $B'$ y el segmento $A'B'$ se mantiene paralelo y a la misma distancia de $AB$ , y sin variar su longitud. Los segmentos $AA'$ y $BB'$ se mantienen paralelos a $OP$ .

Tabla 3. Respuesta al variar objetos geométricos.

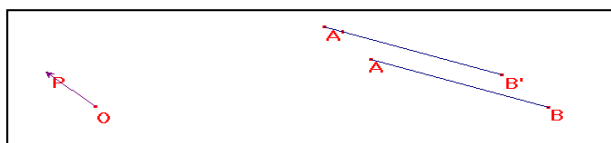


Figura 2 después de haber arrastrado P.

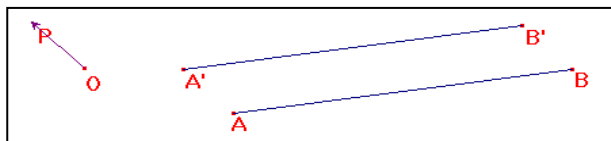


Figura 3 después de haber arrastrado A.

f) Construye la imagen de otros objetos geométricos (recta, círculo, triángulo) y explora su traslación anotando tus observaciones.

**Respuesta:**

*Utilizando, por ejemplo, una circunferencia de centro C:*

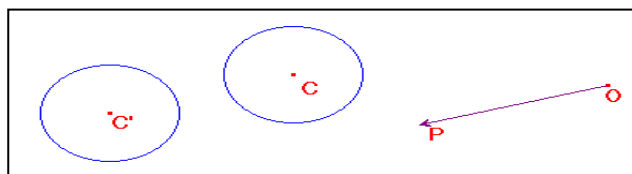


Figura 4

*Podemos mover o variar O, P, C y el radio de la circunferencia de centro C. Si movemos O, o P, la circunferencia imagen se mueve sin variar el radio, y  $CC'$  se mantiene paralelo al vector  $OP$ .*

*Si movemos C, la distancia entre C y  $C'$  no varía y la circunferencia imagen se mueve sin cambiar su radio.*

*Si variamos el radio de la circunferencia antecedente, el radio de la circunferencia imagen varía para mantenerse igual al radio de la primera.*

g) Caracteriza el objeto geométrico imagen en una traslación. Para ello explica las relaciones o las propiedades geométricas que se verifican entre pares de puntos correspondientes bajo la traslación.

### Respuestas:

*En la traslación del segmento AB según el vector OP, el segmento imagen A'B':*

- *tiene la misma longitud de AB*
- *es paralelo a AB*
- *AA' y BB' son paralelos al vector OP*

En general la imagen A' de un punto cualquiera A del plano, mediante la traslación por el vector OP, es tal que:  $AA' = OP$  y  $AA' \parallel OP$

h) Da una definición general de la transformación geométrica Traslación.

### Respuestas:

*La traslación según el vector OP transporta cada punto A del plano al punto A' del mismo plano, de tal forma que el segmento AA' es igual y paralelo al vector OP. La traslación conserva las distancias entre los puntos que se corresponden en la transformación, es decir,  $AB = A'B'$ , donde A' y B' son las imágenes de A y B respectivamente.*

*La traslación no deja puntos invariantes en el plano, es decir, en la traslación mediante un vector diferente del vector nulo, no hay un solo punto que sea imagen de sí mismo.*

2. Simetría axial ó Reflexión con respecto a un eje.
3. Simetría central, o Reflexión respecto a un punto.
4. Rotación.
5. Composición sucesiva de isometrías

## 5. RESULTADOS

En general, con las actividades presentadas y el uso de GeoGebra los estudiantes desarrollaron la comprensión de las propiedades geométricas que rigen la transformación y manipulación de los trazos en las isometrías.

Constatamos que la mayoría de los estudiantes desarrollaron algunas habilidades como el uso de teoremas y propiedades geométricas básicas (por ejemplo, la perpendicularidad, el paralelismo, la bisectriz de un ángulo, etc.).

Por otro lado, se constató que el uso de Geogebra también les ayudó a visualizar sus errores, lo que les permitió reflexionar y rebasar algunos de los obstáculos geométricos que se les presentaron.

Específicamente avanzaron en la formulación de nuevas formas de trazar la simetría axial y central, alternativas a las señaladas como erróneas por el software.

En general, los alumnos tuvieron pocas dificultades en relación al uso y manejo de Geogebra. Más bien, algunas de las dificultades son de tipo cognitivo, como las que se presentan al enfrentarse a la manipulación de un lenguaje matemático formal, como es el geométrico.

De manera similar al trabajo realizado por Kieran y Drijvers (2006) en este estudio exploratorio encontramos pruebas de la relación que existe entre la teoría y las técnicas dentro del ajuste de las tareas retomadas, que confirman la importancia y la productividad del acercamiento de la teoría, técnica y tarea (TTT) Kieran y Drijvers (2006). La técnica y la teoría surgen en la interacción mutua. Las observaciones hechas en ambos ambientes (Geogebra/Papel y lápiz) muestran como las técnicas dieron lugar al pensamiento teórico, y como las reflexiones teóricas han conducido a los estudiantes a desarrollar y usar técnicas.

Es importante hacer notar que las respuestas de los estudiantes en este estudio jugaron un papel central en las discusiones individuales y de grupo, pues ello permitió precisar ideas de los conceptos geométricos en juego.

Las dificultades de los estudiantes, en la coordinación de ideas matemáticas en torno a los conceptos de simetría axial, simetría central, rotación etc., fueron provocadas por las tareas diseñadas, y por el uso de GeoGebra.

En este trabajo la herramienta (GeoGebra) ayudó a la discusión en clase y propicio el refinamiento de procedimientos y habilidades geométricas que incidieron en la visualización y conceptualización matemática.

Estos avances en la visualización y conceptualización de la terminología geométrica y de la simbología matemática formal posibilitan situar a los estudiantes en diferentes niveles en relación con las categorías de la teoría instrumental (ver Iranzo y Fortuny, 2009).

En análisis de los datos obtenidos en este estudio exploratorio permite corroborar que el uso de GeoGebra favorece representaciones variadas de conceptos y nociones. También ayuda a rebasar obstáculos de trazos (por ejemplo, el manejo de la traslación, la simetría axial o reflexión con respecto a un eje, la simetría central o reflexión respecto a un punto, rotación, etc.) al permitir que el estudiante se centre en las nociones geométricas y proponer la solución de los problemas sobre isometrías abordados.

En seguida presentamos una descripción resumida de lo obtenido en este estudio exploratorio, de acuerdo con la categorización retomada y adaptada del trabajo de Iranzo y Fortuny (2009).

A pesar de que haría falta un estudio en profundidad para hacer una clasificación más completa, se pudieron observar las siguientes categorías de ejecuciones de los estudiantes que participaron en este estudio exploratorio, en relación con sus usos y apropiaciones del software que aquí se aplicó.

**Autónomos.** A partir de los datos obtenidos en los archivos de trabajo y las notas de observación es posible decir que ocho de los treinta y seis estudiantes que participaron en este estudio, fueron buenos resolviendo problemas. Son intuitivos y no presentaron obstáculos conceptuales geométricos en la resolución de las actividades planteadas. En estos estudiantes el grado de instrumentalización fue alto así como el grado de instrumentación. Pues en la manipulación realizada con el software GeoGebra intentaron optimizar las estrategias de transformación, basándose en propiedades y reglas de las figuras geométricas.

Así, para estos estudiantes, el uso de GeoGebra constituye un soporte para explorar aspectos curriculares avanzados y desarrollar sus competencias argumentativas. Según Laborde (2001), el uso de un software (en este caso GeoGebra) en la resolución de las actividades propuestas presenta un valor añadido que facilita aspectos materiales.

**Instrumentales.** En esta categoría pudimos ubicar a siete estudiantes, mismos que tienden a modelar los problemas geométricos. Tienen algunas dificultades (conceptuales, geométricas y de visualización) en la transformación, evaluación y trazo formal con el método tradicional de papel y lápiz. El uso de GeoGebra les proporcionó un soporte geométrico, conceptual y visual, en el proceso de transformación isométrica. Por tanto,

establecieron una relación en los trazos paso a paso que les permitió corregir sus errores. En la resolución de las tareas con GeoGebra se apoyaron en algunas propiedades geométricas de las isometrías (axiomas y postulados). El grado de instrumentación e instrumentalización fue de medio a alto. En general, no tuvieron dificultades con el uso de GeoGebra.

**Procedimentales.** En esta categorización tuvimos a quince estudiantes, quienes fueron más analíticos que intuitivos. A pesar de que tuvieron algunas dificultades en algunas transformaciones (por ejemplo en la simetría axial y simetría central (rotación) entendieron los conceptos geométricos. No presentaron dificultades técnicas en el uso y manejo de GeoGebra (utilización de las herramientas y comandos). Sin embargo, el grado de instrumentalización fue inferior al de los estudiantes del tipo instrumental. Estos alumnos razonaron sobre las transformaciones geométricas, en un nivel más bajo. No obstante, lograron completar las isometrías con ayuda de la validación de las transformaciones que les proporcionó Geogebra. Observamos que ellos partieron más de las propiedades geométricas (paralelismo, perpendicularidad, etc.) que de las isometrías. Por ejemplo, no utilizaron la rotación, reflejar el objeto, reflejar el objeto por un punto, el objeto geométrico imagen, etc.).

**Naíf.** Por último ubicamos en esta categorización a los seis estudiantes restantes. Ellos tuvieron muchas dificultades conceptuales, geométricas y de medida, por ejemplo, la forma y el tamaño de la figura, considerar las diversas posiciones de los ejes o puntos, la composición de diversas isometrías. El grado de instrumentación fue bajo. Utilizaron pocas herramientas de GeoGebra y las que usaron principalmente fueron herramientas de construcción de figuras regulares, líneas, puntos, segmentos. Presentaron obstáculos técnicos en el uso y manejo de las herramientas y comandos de GeoGebra. Puede decirse que durante el desarrollo de las actividades nunca tuvieron una estrategia de resolución clara, a pesar de que el uso de GeoGebra les proporcionó un soporte visual geométrico y conceptual. Prácticamente se fundamentaron en los trazos de líneas, puntos y figuras. En el desarrollo de las actividades con Geogebra no lograron pasar de la primera etapa de las transformaciones isométricas.

Estos estudiantes denotaron que razonaron sobre trazo fáciles y no sobre las transformaciones de las isometrías, lo cual, parece ser que tiene relación con su historia escolar. Es decir, con la apropiación de conocimientos previos (Ball, Pierce y Stacey, 2003).

Estas categorías deben ser consideradas como prototipos, las cuales fueron utilizadas para categorizar y analizar el comportamiento o ejecuciones de los estudiantes.

## **6. CONCLUSIONES**

Esta investigación se propuso documentar las ventajas de utilización de nuevos ambientes de aprendizaje de las matemáticas en el salón de clases. Se procuró que el estudiante, el maestro y el conocimiento interactuaran para lograr fortalecer la construcción de significados matemáticos, tal vez más duraderos (Moreno y Waldegg, 2004).

Actualmente existe una línea de experimentación e investigación docente que se basa en el uso de las nuevas tecnologías. Muchas de éstas construidas en torno a programas de computación. Sin embargo, estos ambientes virtuales aún resultan alejados de la realidad cotidiana del estudiante, por lo que todavía resulta conveniente indagar acerca de los elementos didácticos que estimulan a los estudiantes a prepararse de modo más directo.

Como por ejemplo, en situaciones de enseñanza como las que aquí se instrumentaron. Se han utilizado las máquinas electrónicas (computadoras y calculadoras) y los juegos matemáticos digitales, a través de la experimentación, ofreciendo interesantes posibilidades para proponer problemas y soluciones dentro de contextos específicos. Este trabajo de investigación buscó aportar en esta dirección.

Específicamente, permitiendo que el estudiante, formulara sus propias estrategias para la búsqueda de la solución de las isometrías. Además, también se atrajo y generó el interés de los jóvenes que participaron en el estudio, por lo que constatamos que el uso de actividades como las que aquí se desplegaron pudo estimular la participación de los jóvenes en la exploración matemática (ver Falconi y Hoyos, 2005).

Sin embargo, a manera de nota final es necesario señalar que la influencia de cualquier software, y en particular del software GeoGebra, dependerá de los alumnos con los que se trabaje, y también de los problemas que se les propongan (ver Chaachoua, Nicaud, Bronner y Bouhineau, 2004).

También consideramos importante analizar el papel del profesor, lo que, en la terminología de la teoría de la instrumentación, se conoce como buscar el tipo de orquestación que el profesor instrumenta. La orquestación es necesaria para favorecer y guiar el difícil proceso de génesis instrumental con Geogebra. Pero en este estudio exploratorio no hemos incluido datos ni observaciones relativas a la tipología de intervención del profesor.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Artigue, M. (1997). Le Logiciel 'Derive' comme révélateur de phénomènes didactiques liés à l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage. *Educational Studies in Mathematics* 33: 133–169.
- [2] Ball, L., Pierce, R., & Stacey, K. (2003). *Recognising equivalent algebraic expressions: An important component of algebraic expectation for working with CAS*. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 15-22). Honolulu, HI: PME.
- [3] Chaachoua, H., Nicaud; J-F., Bronner, A., Bouhineau, D. (2004). *APLUSIX, a learning environment for algebra, actual use and benefits*. *Proceedings of the 10<sup>th</sup> ICME Conference* [<http://www.icme-organisers.dk/tsg09/>].
- [4] Drijvers, P. and Trouche, L. (2008). From artifacts to instruments, a theoretical framework behind the orchestra metaphor. In M.K. Heid and G.W. Blume (Eds), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Syntheses, Cases, and Perspectives*. Greenwich, CT: Information Age Publishing.
- [5] Falcade, R. (2003). Instruments de médiations sémiotiques dans Cabri pour la notion de fonction. *Paper Presented at the ITEM Conference*, June 2003, Reims, France.



- [6] Falconi, M. y Hoyos, V. (2005). Instrumentos y matemáticas. *Historia, fundamentos y perspectivas educativas*. México: Facultad de Ciencias, UNAM.
- [7] Haspekian, M. (2005). An “Instrumental Approach” to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: The case of spreadsheets. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 10*: (pp. 109–141).
- [8] Hohenwarter, M. y Preiner, J. (2007). Dynamic mathematics with Geogebra. *Journal of Online Mathematics and its Applications*. ID1448, vol. 7.
- [9] Hoyos, V. (2009). Recursos tecnológicos en la escuela y la enseñanza de las matemáticas. En L. M. Garay (coord.), *Tecnologías de información y comunicación Horizontes interdisciplinarios y horizontes de investigación*, p. 77-100. México: SEP-UPN.
- [10] Iranzo, N; Fortuny, J.M. (2009). “La influencia conjunta del uso de GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado” en *Enseñanza de las ciencias* núm. 27(3), pp. 433-446.
- [11] Kieran, C., &Drijvers, P. (2006).The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection: a study of CAS use in secondary school algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 11* (pp. 205-263).
- [12] Kieran, C., &Saldanha,L. (2005). Computer algebra systems (CAS) as a tool for coaxing the emergence of reasoning about equivalence of algebraic expressions. In H.L. Chick & J.L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 193-200). Melbourne, Australia: PME.
- [13] Moreno, L. y Waldegg, G. (2004) *Aprendizaje, matemáticas y tecnología: Una visión integral para el maestro*. México. Aula XXI Santillana.
- [14] Lagrange, J.B. (2000). L’intégration d’instruments informatiques dans l’enseignement: uneapproche par les techniques. *Educational Studies in Mathematics*, (pp. 43, 1-30).

- [15] Laborde, C. (1992). Solving problems in computer based Geometry environment: the influence of the feature of the software, *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik*, 92 (4), pp 128-135.
- [16] Raberdel, P. (2001). Instrumented mediated activity in situations, en Blandford A., Vanderdonck J., gray P. (eds). *People and computers XV-interactions without frontiers*, pp. 17-30. Berlín: Springer-Verlag.
- [17] Trouche, L. (2000). La parabole du gauchet de la casserole à becverseur: étude des processus d'apprentissage dans un environnement de calculatrices symboliques. *Educational Studies in Mathematics* 41: 239–264.