

# Evaluación del Factor de Intensidad de Esfuerzos de un Anclaje de un Puente Atirantado mediante Elemento Finito

**Dr. Luis Alejandro Alcaraz Caracheo**

Departamento de Ingeniería Mecatrónica  
Instituto Tecnológico de Celaya  
*alex.alcara@gmail.com*

**Elías Daniel Valadez González**

Departamento de Ingeniería Mecánica  
Instituto Tecnológico de Celaya  
*eldanvgz@hotmail.com*

**Elías José Juan Rodríguez Segura**

Departamento de Ingeniería Mecatrónica  
Instituto Tecnológico de Celaya

**Víctor Hugo Cacique Borrego**

Departamento de Ingeniería Mecatrónica  
Instituto Tecnológico de Celaya

**Coral Martínez Nolasco**

Departamento de Ingeniería Mecatrónica  
Instituto Tecnológico de Celaya

## Resumen

Mediante la teoría de la mecánica de la fractura, se determina el factor de intensidad de esfuerzos (FIE), de un elemento plano utilizando la metodología de los procesos de la FITNET, el método de elementos finitos (MEF) por medio de la simulación, así como la reportada en la literatura, para verificar que los resultados obtenidos de manera analítica correspondan a los obtenidos por MEF, al verificar que la simulación es aceptable, se prosiguió a obtener el FIE de un anclaje de un puente y se comparó con

una placa, cuyas dimensiones fueron obtenidas de las dimensiones más angostas del anclaje, con el objetivo de poder analizar la geometría del anclaje con la formulación para una placa.

**Palabras clave:** Factor de Intensidad de Esfuerzos, Método de Elementos Finitos, simulación por elementos finitos.

## Nomenclatura

$Y$ : Parámetro que involucra la geometría de la grieta y del componente,

$a$ : Tamaño de grieta (radio menor de la grieta).

$\sigma$ : Función que representa la magnitud del esfuerzo en el componente.

$f_w$ : Factor de anchura finita; un factor que aumenta la intensidad de esfuerzos cuando la grieta es relativamente grande en comparación con el cuerpo en el que se encuentra.

$k_m$ : Factor de concentración de esfuerzos debido a la desalineación.

$k_{tb}$ : Factor de concentración de esfuerzo debido a la flexión.

$k_{tm}$ : Factor de concentración de esfuerzo aplicado a esfuerzos de membrana.

$M$ : Factor de abultamiento.

$M_{km}, M_{kb}$ : Factores de concentración de intensidad de esfuerzos asociados a grietas situadas cerca de un pie de soldadura.

$M_m, M_b$ : Factores de concentración de intensidad de esfuerzos para una geometría particular, agrietada.

$P_b$  : Esfuerzo primario de flexión.

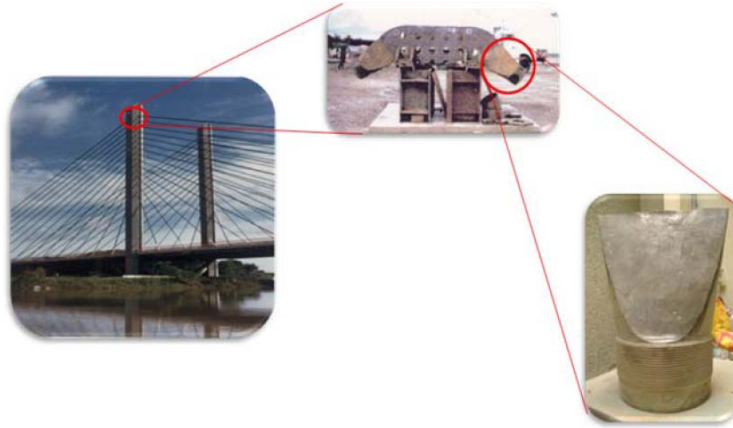
$P_m$  : Esfuerzo primario de membrana.

$Q_b$  : Esfuerzo secundario de flexión.

$Q_m$  : Esfuerzo secundario de membrana.

## 1. Introducción

El Factor de Intensidad de Esfuerzos (FIE) es un parámetro de la mecánica de fractura que permite evaluar el nivel de esfuerzos en el contorno de una grieta localizada en un elemento estructural. Este parámetro es muy importante ya que es necesario para poder evaluar la integridad estructural de elementos mecánicos. En la literatura [1-4] se pueden encontrar modelos matemáticos que cuantifican el FIE para geometrías comunes como son: placas, tubos, recipientes a presión, entre otros. Sin embargo, cuando la geometría que interesa analizar no es común, se tiene que recurrir a otras alternativas como la simulación por elementos finitos [5]. La motivación de este trabajo nace debido a la falla por fractura frágil que se presentó en uno de los anclajes de un puente atirantado que tiene 112 anclajes [6], cuya geometría de este elemento es irregular (ver Figura 1.1). Por lo tanto, es de gran importancia evaluar el FIE en este elemento para llevar a cabo su análisis de integridad.



**Figura 1.1. Elemento de anclaje.**

Dentro de los estudios que se han realizado en los anclajes del puente [7], se ha reportado que la grietas aparecen en la parte más delgas del componente (ver Figura 1.2), la cual tiene una sección transversal rectangular que va aumentando conforme se acerca a la sección circular del componente. Por lo tanto, es de interés conocer si las formulaciones para el cálculo del factor de intensidad de esfuerzos de una placa reportadas en la literatura pueden ser empleadas para este componente. En este trabajo se presenta en primera instancia el FIE de una placa con grieta obtenido de manera analítica y mediante el software Ansys Workbench. Posteriormente, se modeló el anclaje del puente y se obtuvo el factor de intensidad de esfuerzos en la punta de una grieta y se comparó con los resultados de la placa.



**Figura 1.2. Geometría del anclaje.**

## 2. FORMULACIONES DEL FIE DE UNA PLACA

### 2.1 Factor de Intensidad de Esfuerzo (FIE)

El factor de intensidad de esfuerzos  $K$ , es el parámetro que define la magnitud de los esfuerzos en la punta de la grieta, si la deformación en el cuerpo es esencialmente elástica [8]. La forma matemática más general de  $K$  es a través de la ec.2.1

$$K = Y\sigma\sqrt{\pi a} \quad (2.1)$$

Donde las unidades del factor de intensidad de esfuerzo son, de acuerdo con su expresión general:

$$K[=](\text{esfuerzo})(\text{distancia})^{1/2}$$

Las unidades más comúnmente usadas son  $MPa\sqrt{m}$  y  $ksi\sqrt{pulg}$ .

### 2.2 Determinación del FIE de una placa en base al procedimiento FITNET

El procedimiento europeo *FITNET* es un documento de evaluación de integridad estructural que contempla los cuatro principales modos de falla: fractura-colapso plástico, fatiga, fluencia o creep y corrosión [9].

En el módulo de fractura, el procedimiento FITNET reporta la solución del factor de intensidad de esfuerzos para una placa con grieta mediante ec.2.2

$$K_1 = (Y\sigma)^*\sqrt{\pi^*a} \quad (2.2)$$

Estos se calculan con las ecuaciones 2.3.

$$Y = Mf_w [k_m M_{km} M_m P_m + k_{ib} M_{kb} M_b \{P_b + (k_m - 1)P_m\}] \quad (2.3)$$

Donde los factores  $M_{km}$  y  $M_{kb}$  se consideran solo cuando la grieta está en una región de concentración local de esfuerzos, como por ejemplo, en la región cercana a la soldadura.

Para un cuerpo infinito y sin soldaduras, las concentraciones globales de esfuerzo, falta de alineación o de presión inducida por pandeo, se recomienda considerar

$M_{km} = M_{kb} = M = f_w = k_{tb} = k_{tm} = 1$ , y los únicos factores específicos de la geometría de la ecuación anterior son:  $M_m$  y  $M_b$ .

Para el caso de una grieta finita en una placa, los parámetros para obtener el factor de intensidad de esfuerzos se calculan con las siguientes ecuaciones con  $M = 1$ .

$$f_w = \left\{ \sec \left[ \left( \frac{\pi c}{W} \right) (a/B)^{0.5} \right] \right\}^{0.5} \quad (2.4)$$

$$M_m = \left\{ M_1 + M_2 * (a/B)^2 + M_3 (a/B)^4 \right\} g * f_\theta / \Phi \quad (2.5)$$

Para el caso

$$a \leq a/2c \leq 0.5$$

$$M_1 = 1.13 - 0.09 * (a/c) \quad (2.6)$$

$$M_2 = [0.89 / \{0.2 + (a/c)\}] - 0.54 \quad (2.7)$$

$$M_3 = 0.5 - 1 / \{0.65 + (a/c)\} + 14 \{1 - (a/c)\}^{24} \quad (2.8)$$

$$g = 1 + \left\{ 0.1 + 0.35 (a/B)^2 \right\} (1 - \sin \theta)^2 \quad (2.9)$$

$$f_\theta = \left\{ (a/c)^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \right\}^{0.25} \quad (2.10)$$

$$\Phi = \sqrt{1 + 1.464 \left( \frac{a}{c} \right)^{1.65}} \quad (2.11)$$

Para el caso

$$0.5 < a/2c \leq 1.0$$

$$M_1 = (c/a)^{0.5} * \{1 + 0.04 * (c/a)\} \quad (2.12)$$

$$M_2 = 0.2 * (c/a)^4 \quad (2.13)$$

$$M_3 = -0.11(c/a)^4 \quad (2.14)$$

$$g = 1 + \{0.1 + 0.35(c/a)(a/B)^2\}(1 - \text{sen}\theta)^2 \quad (2.15)$$

$$f_\theta = \{(c/a)^2 \text{sen}^2\theta + \text{cos}^2\theta\}^{0.25} \quad (2.16)$$

$$\Phi = \sqrt{1 + 1.464\left(\frac{c}{a}\right)^{1.65}} \quad (2.17)$$

### 2.3 Placa Procedimiento de Anderson

Para el cálculo del FIE de una placa con grieta en el centro Anderson [4] reporta las siguientes ecuaciones 2.18 a 2.19.

$$K_I = \lambda_s \sigma \sqrt{\frac{\pi a}{Q}} f(\phi) \quad (2.18)$$

$$Q = 1 + 1.464\left(\frac{a}{c}\right)^{1.65} \quad (2.19)$$

$$\lambda_s = \left[ 1.13 - 0.09 \left( \frac{a}{c} \right) \right] \left[ 1 + 0.1(1 - \sin \phi)^2 \right] \quad (2.20)$$

$$f(\phi) = \left[ \sin^2(\phi) + \left( \frac{a}{c} \right)^2 \cos^2(\phi) \right]^{\frac{1}{4}} \quad (2.21)$$

Se hace notar que el valor de  $K$  se puede normalizar con la ecuación 2.22, para poder comparar los resultados de un autor a otro sin importar el procedimiento que se siguió evitando caer en errores de unidades.

$$K_{norm} = \frac{K}{\sigma \sqrt{\pi * a}} \quad (2.22)$$

### 3. METODOLOGÍA

Como primer paso, se determinó el FIE de una placa plana mediante los procedimientos analíticos FITNET y Anderson. Luego, se realizó la simulación de la placa para obtener el FIE mediante elementos finitos. El FIE de simulación se validó con los resultados obtenidos analíticamente. El segundo paso fue realizar la simulación del anclaje y obtener el valor del FIE. Los resultados del anclaje y de la placa se compararon para evaluar la posibilidad de emplear las expresiones analíticas de la placa para el análisis de integridad del anclaje. La metodología que se siguió se muestra de manera esquemática en la figura 3.1.



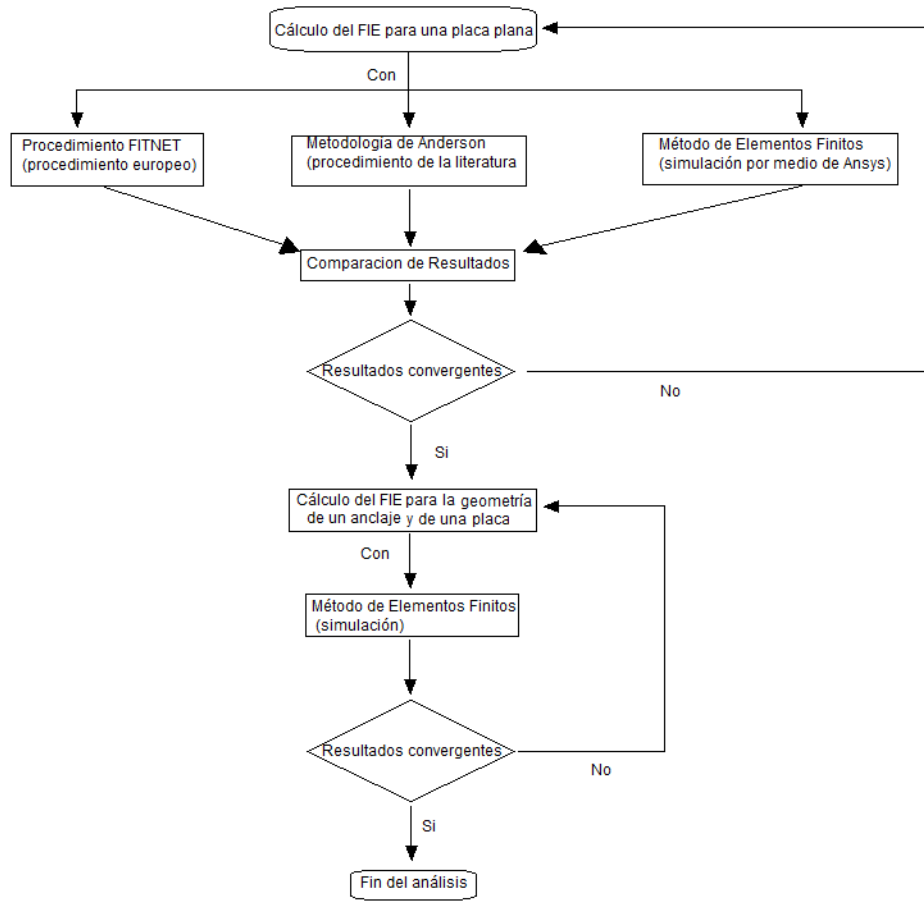


Figura 3.1. Metodología empleada.

La placa que sirvió para comparar las tres metodologías que se siguieron, tiene las dimensiones que se muestran en la figura 3.2.

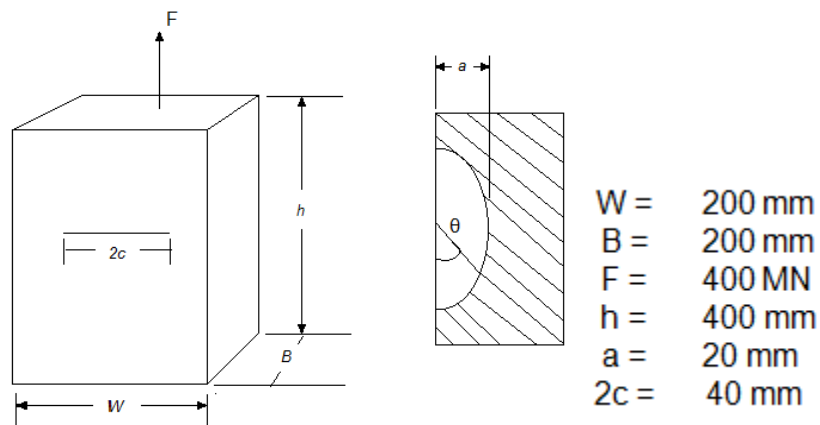


Figura 3.2. Placa plana.

Para cada una de las diferentes metodologías se analizaron los siguientes casos que son los más críticos debidos a una grieta:

1. Relación de  $a/c=1$  con ángulos variables de  $0$  a  $180^\circ$ , ver figura 3.3 a).
2. Relación de  $a/c=0.5$  con ángulos variables de  $0$  a  $180^\circ$ , ver figura 3.3 b).
3. Angulo constante de  $0^\circ$  con la relación  $a/c$  como variable de  $0$  a  $1$  en intervalos de  $0.2$ .
4. Angulo constante de  $90^\circ$  con la relación  $a/c$  como variable de  $0$  a  $1$  en intervalos de  $0.2$ .

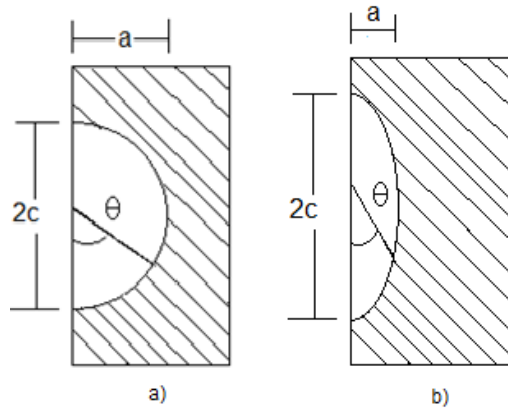


Figura 3.3. a) Grieta semicircular, b) Grieta semielíptica.

Por practicidad, a continuación se detalla el procedimiento para calcular el FIE con las tres metodologías, de la condición de la grieta para el caso en el que la relación  $a/c = 1$  y ángulo de  $0^\circ$ .

### 3.1 Procedimiento FITNET

Para determinar el FIE de la placa mediante el procedimiento FITNET, se consideró

$M_{km} = M_{kb} = M = f_w = k_{tb} = k_{tm} = 1$ , de acuerdo a lo mencionado en el apartado 2.2.

Para desarrollar el análisis de una grieta con relación de  $a/c=1$  y  $\theta=0$  se usaron las ecuaciones de la 2.6 a la 2.11 para encontrar el valor de  $M_m$ , el cual resulta de:

$$M_m = \{1.04 + 0.2 * (0.02/0.2)^2 + (-0.11) * (0.02/0.2)^4\} 1.1035 * 1/1.56971$$

$$M_m = 0.7325$$

El cálculo del factor de anchura finita  $f_w$  se calcula mediante la ec.2.6 y con los parámetros de la figura 3.2, se obtiene un valor de:

$$f_w = \left\{ \sec \left[ (\pi 0.02 / 0.2) (0.02 / 0.2)^{0.5} \right] \right\}^{0.5}$$

$$f_w = 1.0024$$

Simplificando la ec.2.3, ya que no se considera efecto de soldadura o algún tipo de concentrador de esfuerzos resulta solo como el producto de  $f_w M_m$ . Por lo tanto, empleando la ec.2.2 el factor de intensidad de esfuerzos resultó de 1840.68 MPa m<sup>1/2</sup>. Este valor se normalizó utilizando la ec.2.22 resultando 0.73433 del FIE.

### 3.2 Procedimiento de Anderson

Para determinar el FIE de una placa mediante las expresiones reportadas por Anderson, se inició calculando  $f(\phi)$  con la ecuación 2.21.

$$f(0) = \left[ \sin^2(0) + (1)^2 \cos^2(0) \right]^{\frac{1}{4}}$$

$$f(0) = 1$$

El valor de  $\lambda_s$  y el valor de  $Q$  se determinó empleando la ecuaciones 2.20 y 2.19, respectivamente.

$$\lambda_s = [1.13 - 0.09(1)] [1.0.1(1 - \sin 0)^2]$$

$$\lambda_s = 1.144$$

$$Q = 1 + 1.464(1)^{1.65}$$

$$Q = 2.464$$

Sustituyendo los valores obtenidos con las expresiones anteriores en la ec.2.18, se obtiene el FIE con un valor de  $1826.819 \text{ MPa} \cdot \sqrt{\text{m}}$ . Este valor normalizó y se emplea en la ec.2.22 obteniendo resultando 0.72879.

### 3.3 Preparación del modelo de la placa

Para determinar el FIE de la placa mediante elementos finitos se eligió el software Ansys Workbench versión 14.5, debido a que cuenta con una opción específica para incrustar la grieta, la cual se llama "Fracture-Crack", lo que facilita en gran medida el procedimiento de simulación.

Como primer paso del procedimiento, se construyó la geometría de la placa con la dimensiones de la figura 3.2. Posteriormente, se le incrusto la grieta y se discretizó con elementos tetraedros, considerando un refinamiento de malla en la región cercana a la grieta, como se muestra en figura 3.2. Las condiciones de frontera fueron las que se muestran en la figura 3.2.

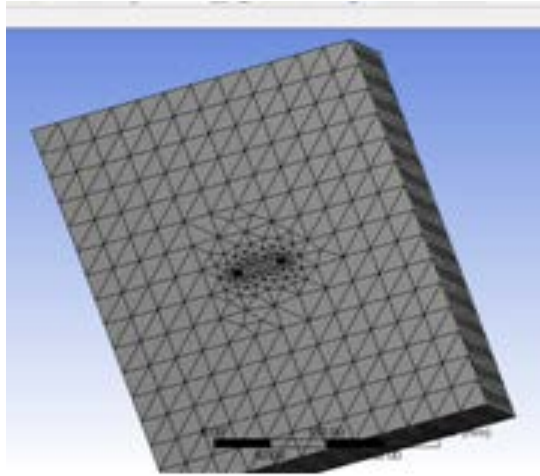


Figura 3.4. Modelo discretizado de placa con grieta.

### 3.4 Determinación del F.I.E. de un anclaje de un puente atirantado.

En la figura 3.4 se muestran las dimensiones del anclaje del puente [9]. El modelo del anclaje se realizó en el software inventor (ver figura 3.5) para posteriormente analizarla en Ansys Workbench.

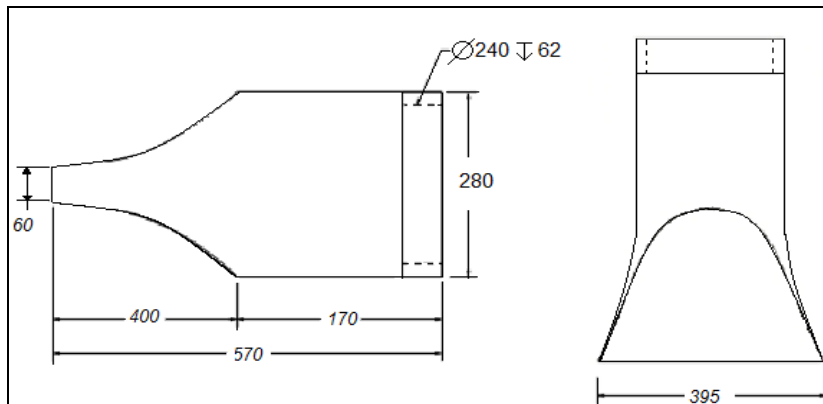
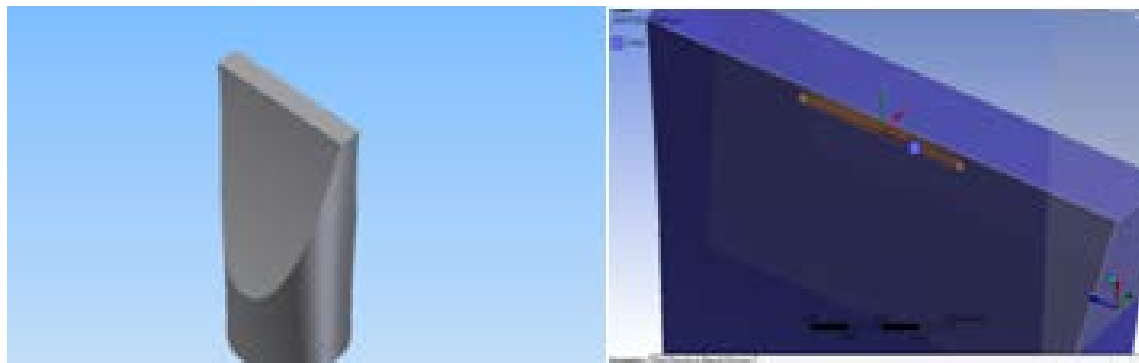


Figura 3.5 Dimensiones del Anclaje

En el entorno de Ansys Workbench, al modelo del anclaje se le colocó una grieta localizada a diez milímetros de la punta del anclaje (ver Figura 3.6), tal como se reporta en la referencia [7]. Las dimensiones de la grieta fueron 65 mm de largo (2c) y de

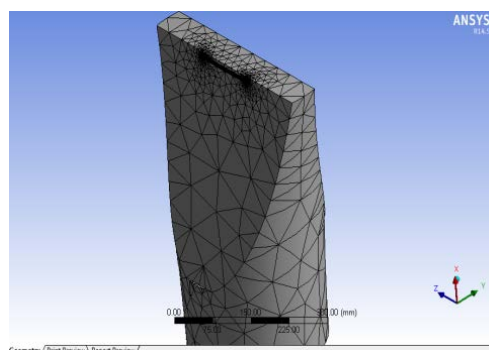
profundidad 3mm (a), sin embargo estos valores cambian para los casos de ángulos constantes de  $0^\circ$  y  $90^\circ$ , ya que la relación a/c no es contante.



**Figura 3.6. Modelo del anclaje en Inventor.**

### Discretización del modelo

Para poder hacer el mallado y que el programa reconozca a la grieta como parte de la geometría, se inserta un método en “Mesh”, como se muestra la figura 3.7, generando 38541 elementos en toda la geometría con 31 nodos en la grieta.



**Figura 3.7. Generación de la malla.**

### Condiciones de frontera

Se aplicó una carga de 1.53 MN sobre el área transversal rectangular del anclaje, la carga más alta registrada en el tirante del puente. En el extremo opuesto se le aplicó

una condición de restricción total de movimiento (fixed support). Estas condiciones se aprecian en la figura 3.8, las mismas condiciones fueron aplicadas a una placa plana con dimensiones obtenidas de las más delgadas del anclaje.

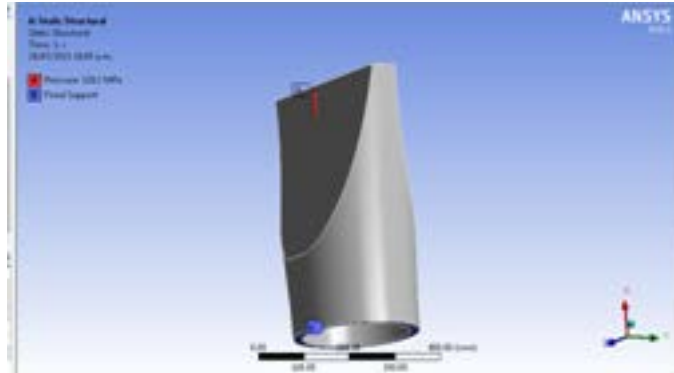


Figura 3.8. Condiciones de frontera del anclaje.

#### 4. RESULTADOS

Para la placa, en el caso en que el ángulo varía de 0 a 180°, y la relación  $a/c$  permanece constante e igual a 1, la figura 4.1 muestra los resultados del FIE normalizado. En la figura 4.2 se muestran los resultados para cuando la placa tiene una relación  $a/c$  de 0.5. En ambas gráficas se puede observar que los tres procedimientos empleados tienen un comportamiento similar aunque en el caso de la relación de  $a/c = 0.5$  los resultados del FITNET son un poco más conservadores.

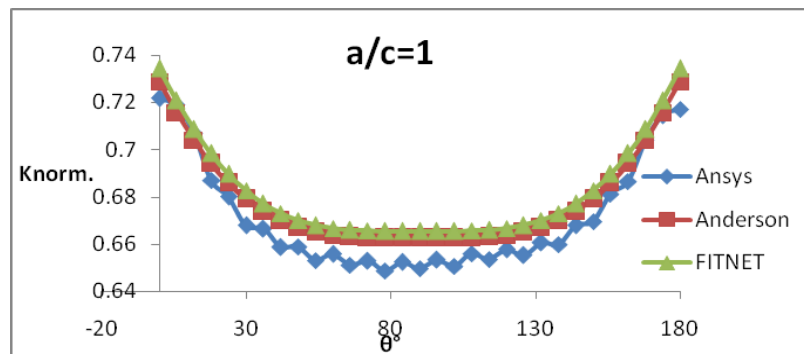


Figura 4.1. Gráfica de resultados, para  $\theta$  variable de 0 a 180° y  $a/c = 1$ .

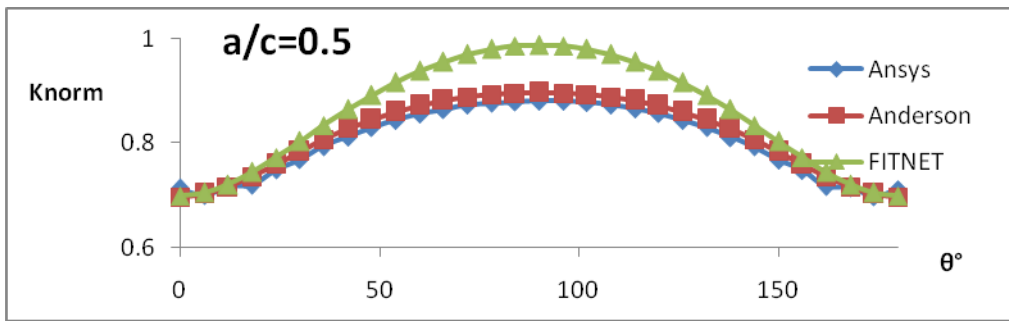


Figura 4.2. Gráfica de resultados, para  $\theta$  variable de 0 a  $180^\circ$  y  $a/c = 0.5$ .

Los resultados para la placa cuando la relación  $a/c$  varía de 0.2 a 1 en intervalos de 0.2, se muestran en la figura 4.3 y 4.4 para cuando  $\theta = 90$  y  $\theta = 0$ , respectivamente. En estas gráficas se observa que no hay diferencia significativa entre los resultados obtenidos por los tres procedimientos.

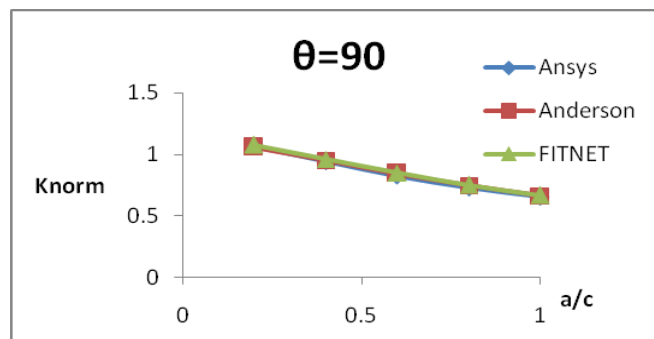


Figura 4.3. Gráfica para  $\theta$  constante de 90, y  $a/c$  variable.

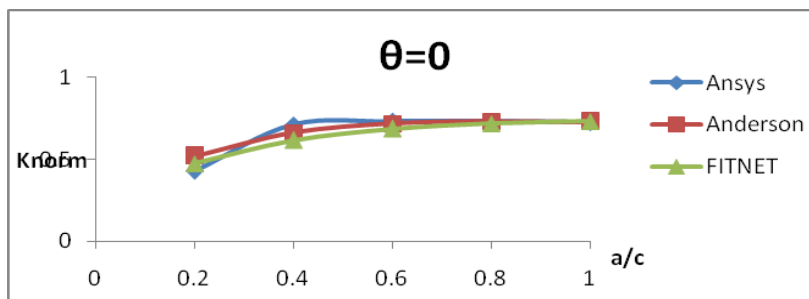


Figura 4.4. Gráfica para  $\theta$  constante de 0, y  $a/c$  variable.



Una vez que se compararon que los resultados de la placa mediante los procedimientos analíticos y la simulación por elementos finitos fueron similares, entonces, se procedió a obtener los resultados para el anclaje y compararlo con una placa de espesor de 60 mm de espesor (ver figura 4.5). Como se puede observar no existe diferencia significativa entre ambos resultados.

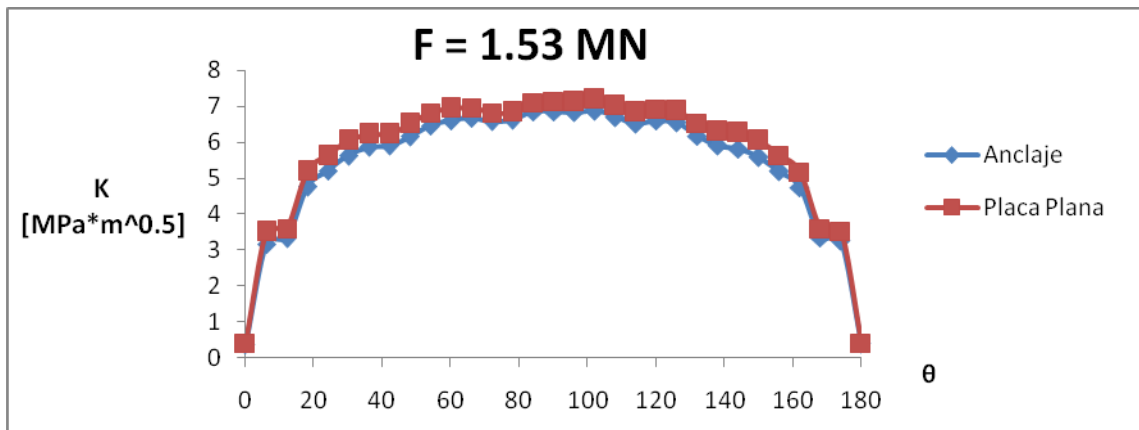


Figura 4.5. Gráfica de los resultados de la placa y el anclaje con una fuerza F1.

## 5. CONCLUSIONES

La evaluación del factor de intensidad de esfuerzos (KI), por medio de la simulación en la placa, fue un poco mayor que el obtenido en el anclaje, por lo cual, se puede concluir, que es posible utilizar la teoría formulada en la literatura, de una geometría común (placa plana), para el caso de la geometría del anclaje, y con ello evitar realizar nuevas expresiones matemáticas por la complejidad de la geometría antes mencionada.

Cabe señalar que el error porcentual que se obtuvo de las metodologías utilizadas para la comparación con la simulación fue de 17.48% siendo con la referencia de Anderson para el caso de la placa plana con la relación a/c como variable y con ángulo de 0°.

## **REFERENCIAS**

- [1] Tada, H., Paris, P.C. and Irwin, G.R., *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, 2<sup>a</sup> Ed. Paris Production, St. Louis, MO, 1985.
- [2] F. Gutiérrez-Solana, S. Cicero, *FITNET FFS PROCEDURE*, Volumen 1 2007, acceso en, abril 9, 2013, <http://www.gef.es/Congresos/24/PDF/1-3.pdf>
- [3] J. M. Alegre, P. M. Bravo, *Aplicación del procedimiento ASME-API 579 para el diseño en fatiga de vasijas de alta presión bobinadas vol. 2* (2009).
- [4] T. L. Anderson, *Fracture Mechanics*, 2nd ed., CRC Press, Taylor & Francis Groupm LLC.
- [5] Newman Jr, J. C., and I. S. Raju. *Stress-intensity factor equations for cracks in three-dimensional finite bodies subjected to tension and bending loads*. No. NASA-TM-85793. NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMIN LANGLEY RESEARCH CENTER HAMPTON VA, 1984.
- [6] Alcaraz-Caracheo, L. A., Terán-Guillén, J., Carrión-Viramontes, F. J., & Martínez-Madrid, M. "Correlation between Specimen Size and Fracture Toughness of 1Cr-

½Ni Cast Steel Used in the Anchorage of a Cable-Stayed Bridge." Científica 16.3 (2012): 135-143.

[7] Toledano-Andrade Juan Carlos, Análisis de esfuerzos en un elemento de anclaje superior de un puente atirantado utilizando simulación por elementos finitos, Tesis de Maestría, Instituto Tecnológico de Celaya, Celaya, Gto., 2009.

[8] González Velázquez Jorge Luis, Mecánica de la fractura, 2a ed.; Limusa 2007

[9] F.Gutiérrez-Solana, S. Cicero, FITNET FFS PROCEDURE, Volumen 1 2007, acceso en, abril 9, 2013, <http://www.gef.es/Congresos/24/PDF/1-3.pdf>