

SINCRONIZACIÓN DE OSCILADORES CAÓTICOS POR ACOPLAMIENTO A MODELOS EN REDES DE TOPOLOGÍA ESTRELLA

Didier López Mancilla

Universidad de Guadalajara

dlopez@culagos.udg.mx

Gerardo López Cahuich

Universidad de Guadalajara

dlopez@culagos.udg.mx

Resumen

En este trabajo se presenta la sincronización de redes de osciladores caóticos usando acoplamiento a modelos. En particular, en este trabajo se limita el tipo de redes topología estrella. Acoplamiento a modelos es una técnica tomada de la teoría de control no lineal y es adaptada para sincronizar no solo parejas de sistemas complejos, sino redes en topología estrella. Los nodos de las redes de sistemas complejos están propuestos como sistemas caóticos, lo que permite tener sistemas verdaderamente complejos y la propuesta aporta a la problemática de sincronización de redes aplicada a las comunicaciones seguras.

Palabra(s) Clave(s): Acoplamiento a modelos, control no lineal, sincronización de redes.

1. Introducción

En la actualidad el término sincronía, o sincronización, es ampliamente usado tanto en el lenguaje común como también en diversas áreas del conocimiento y las ciencias, refiriéndose de forma general al fenómeno mediante el cual dos o más elementos suceden al mismo tiempo, de manera pareja y equilibrada, simultáneamente.

El término sincronía proviene del griego $\sigma\upsilon\nu$ (*sýn*), que significa juntos o en conjunto y $\chi\rho\acute{o}\nu\omicron\varsigma$ (*chrónos*), que significa tiempo, por lo cual puede ser entendido como algo que sucede al mismo tiempo. La sincronía nos habla de una situación en la cual dos personas o dos elementos actúan de manera conjunta y pareja.

La sincronía, dice Strogatz, aparece en los lugares más inverosímiles: de las órbitas de los satélites a los electrones, el zumbido de los grillos, la tendencia en mujeres que viven cerca o que pasan mucho tiempo juntas a menstruar aproximadamente al mismo tiempo, etc. El orden está por todas partes y los científicos de diversas disciplinas están descubriendo constantemente nuevos ejemplos de ello. Pero Strogatz y sus colegas afirman algo mucho más extraordinario: “El orden no es sólo posible, es inevitable” [1].

Antagónicamente, se dice que el caos es un fenómeno inusual, que es irregular y desordenado. El caos comúnmente se asocia a una forma de ruido (un comportamiento indeseable), sin embargo no lo es, ya que es determinístico. Así, una señal caótica es una forma intermedia entre una señal periódica y una señal estocástica (ruido), y éste carácter intrínseco es el que dota de un gran interés de estudio y ofrece una amplia gama de aplicaciones, como por ejemplo, en comunicaciones seguras.

La primera evidencia aceptada del caos físico, fue descubierta por Edward Lorenz en 1963, cuando notó que un conjunto de tres ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, acopladas entre sí, pueden generar trayectorias caóticas [2]. El comportamiento caótico observado en el tiempo no se debió a fuentes externas de ruido (no las hay en las ecuaciones de Lorenz), ni a un número de grados de libertad infinito (en el atractor de Lorenz solo hay tres grados de libertad), ni a la incertidumbre asociada con mecánica cuántica (el sistema considerado es asociado a la mecánica clásica). La fuente de la irregularidad es la propiedad de ese atractor no lineal, de separar trayectorias inicialmente cercanas, exponencialmente rápido en una región acotada del espacio de fase. Lorenz llamo a esta sensible dependencia en las condiciones iniciales el *efecto mariposa*.

Hoy en día son ya numerosas las aplicaciones de la sincronización de sistemas caóticos en distintas ramas de la ciencia como por ejemplo comunicaciones

seguras con esquemas teóricos o experimentales [3-6], en el estudio de fenómenos de sistemas vivos como el Parkinson [7], encefalogramas en personas epilépticas [8], para medir actividades cardíacas [9], en los estudios de población cambiante en colonias de animales o en la propagación de epidemias [10], etc .

Como se ve en las referencias anteriores, los experimentos con sistemas que operan en régimen caótico, han obtenido, particularmente, un nuevo impulso en la década de los 90, a partir de los trabajos de Pecora y Carroll [11]. Trabajos recientes en sincronización apoyan la idea de que es realmente un tema muy actual [12-16].

Sincronizar sistemas con dinámicas complejas como los sistemas caóticos, es decir, hacer que coincidan en tiempo y forma con alguna dinámica de interés ha generado diversas líneas de investigación, principalmente por el gran potencial de aplicaciones que tiene en el área de comunicaciones seguras, así como en el desarrollo de la teoría del caos.

Los osciladores caóticos pueden ser una herramienta de gran utilidad para estudiar una gran variedad de procesos, actuando como complemento entre el experimento en sí y la simulación numérica por computadora. Entre las ventajas que ofrece la simulación se encuentran tanto el alto grado de desarrollo de componentes electrónicos como el bajo coste (en general) de dispositivos.

Como se mencionó anteriormente, son ya muchos los trabajos que han contribuido al estudio de la sincronización de los sistemas caóticos usando control, tanto acoplamiento de sistemas idénticos [17], así como no idénticos [18]. Sin embargo la mayoría de estos trabajos no contemplan que tal vez no todos los estados del sistema estén disponibles para modelar la ley de control.

De lo anterior, es que surge una de las principales motivaciones del presente trabajo por estudiar la sincronización de osciladores caóticos, tanto continuos como discretos con la intención de contribuir a la solución de este problema, empleando como metodología de trabajo, herramientas matemáticas conocidas y tomadas de la teoría de control no lineal, como son el acoplamiento a modelos y observadores, las cuales, presenta algunas ventajas con relación a otras metodologías de sincronización.

2. Desarrollo de la propuesta

Considere el sistema caótico de Chen, dado por el conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas 1, 2 y 3.

$$\dot{x}_1 = \theta_1(x_2 - x_1) \quad (1)$$

$$\dot{x}_2 = (\theta_2 - \theta_1)x_1 - x_1x_3 + \theta_2x_2 \quad (2)$$

$$\dot{x}_3 = x_1x_2 - \theta_3x_3 \quad (3)$$

Con parámetros:

$$\theta_1 = 35, \quad \theta_2 = 28, \quad \theta_3 = 3 \quad (4)$$

Las ecuaciones del oscilador se pueden reescribir añadiendo una entrada de control $u(t)$, de tal forma que el grado relativo del sistema sea $r = 3$ como se muestra en la ecuación 2 y 3.

Sea el oscilador P la planta, y M el modelo, cuyos parámetros son idénticos, ecuaciones 5 y 6.

$$P \begin{cases} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{cases} = \begin{bmatrix} \theta_1(x_2 - x_1) \\ (\theta_2 - \theta_1)x_1 - x_1x_3 + \theta_2x_2 \\ x_1x_2 - \theta_3x_3 \\ y = x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (5)$$

$$M \begin{cases} \dot{x}_{M1} \\ \dot{x}_{M2} \\ \dot{x}_{M3} \end{cases} = \begin{bmatrix} \theta_1(x_{M2} - x_{M1}) \\ (\theta_2 - \theta_1)x_{M1} - x_{M1}x_{M3} + \theta_2x_{M2} \\ x_{M1}x_{M2} - \theta_3x_{M3} \\ y = x_{M1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_M \quad (6)$$

Se desea diseñar una ley de control por realimentación para la planta P , tal que, independientemente de las condiciones iniciales de P y M , obligue a la salida $y_M(t)$ a converger asintóticamente con la salida $y(t)$.

El problema de acoplamiento a modelos (figura 1) se puede reducir al problema de desacoplar la salida de un sistema auxiliar E de la entrada $u_M(t)$. Para este propósito el sistema auxiliar es definido con ecuación 7.

$$E \begin{cases} \frac{dx_E}{dt} = f_E(x_E) + \hat{g}_E(x_E)u + \hat{g}_M(x_E)u_M \\ y_E = h_E(x_E) \end{cases} \quad (7)$$

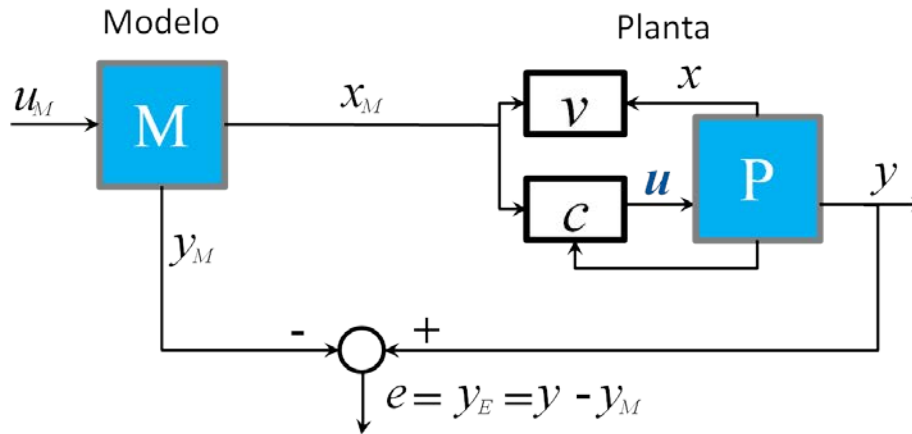


Figura 1 Esquema de sincronización por medio de Acoplamiento a Modelos.

Con los estados $x_E = (x, x_M)^T \in R^{n+n_M}$, y entradas $u(t)$ y $u_M(t)$.

Donde:

$$\begin{aligned}
 f_E(x_E) &= \begin{pmatrix} f(x) \\ f_M(x_M) \end{pmatrix}, & \hat{g}_E(x_E) &= \begin{pmatrix} g(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 \hat{g}_M(x_E) &= \begin{pmatrix} 0 \\ g_M(x_M) \end{pmatrix}, & h_E(x_E) &= h(x) - h_M(x_M).
 \end{aligned} \tag{8}$$

Para ello iniciaremos realizando el cambio de coordenadas, por ejemplo para P :

$$\begin{aligned}
 L_g h(x) &= [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \\
 L_f h(x) &= [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \theta_1(x_2 - x_1) \\ (\theta_2 - \theta_1)x_1 - x_1x_3 + \theta_2x_2 \\ x_1x_2 - \theta_3x_3 \end{bmatrix} = \theta_1(x_2 - x_1) \\
 \frac{\partial L_f h(x)}{\partial x} &= [-\theta_1 \quad \theta_1 \quad 0] \\
 L_g L_f h(x) &= [-\theta_1 \quad \theta_1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \\
 L_f^2 h(x) &= [-\theta_1 \quad \theta_1 \quad 0] \begin{bmatrix} \theta_1(x_2 - x_1) \\ (\theta_2 - \theta_1)x_1 - x_1x_3 + \theta_2x_2 \\ x_1x_2 - \theta_3x_3 \end{bmatrix} \\
 &= -\theta_1^2(x_2 - x_1) + \theta_1((\theta_2 - \theta_1)x_1 - x_1x_3 + \theta_2x_2)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L_f^2 h(x)}{\partial x} = [\theta_1(\theta_2 - x_3) \quad \theta_1(\theta_2 - \theta_1) \quad -\theta_1 x_1] = \theta_1 [(\theta_2 - x_3) \quad (\theta_2 - \theta_1) \quad -x_1]$$

$$L_g L_f^2 h(x) = [\theta_1(\theta_2 - x_3) \quad \theta_1(\theta_2 - \theta_1) \quad -\theta_1 x_1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\theta_1 x_1$$

$$\begin{aligned} L_f^3 h(x) &= [\theta_1(\theta_2 - x_3) \quad \theta_1(\theta_2 - \theta_1) \quad -\theta_1 x_1] \begin{bmatrix} \theta_1(x_2 - x_1) \\ (\theta_2 - \theta_1)x_1 - x_1 x_3 + \theta_2 x_2 \\ x_1 x_2 - \theta_3 x_3 \end{bmatrix} \\ &= \theta_1(\theta_2 - x_3)\theta_1(x_2 - x_1) + \theta_1(\theta_2 - \theta_1)[(\theta_2 - \theta_1)x_1 - x_1 x_3 + \theta_2 x_2] \\ &\quad - \theta_1 x_1 [x_1 x_2 - \theta_3 x_3] \\ &= \theta_1((\theta_2 - x_3)\dot{x}_1 + (\theta_2 - \theta_1)\dot{x}_2 - x_1(x_1 x_2 - \theta_3 x_3)) \end{aligned}$$

Obteniendo finalmente P expresado en nuevas coordenadas,

$$z_1 = h(x) = x_1$$

$$z_2 = L_f h(x) = \theta_1(x_2 - x_1)$$

$$z_3 = L_f^2 h(x) = -\theta_1^2(x_2 - x_1) + \theta_1((\theta_2 - \theta_1)x_1 - x_1 x_3 + \theta_2 x_2)$$

Debido a que en el sistema axilar E , la salida está definida como

$$e(t) = y_E(t) = h_E(x_E) = h(x) - h_M(x_M)$$

Y teniendo en cuenta que tanto P como M son sistemas idénticos, el cambio de coordenadas para M sería de forma similar al cambio en P . El sistema axilar E expresado en nuevas coordenadas queda de la siguiente manera:

$$\zeta_1 = x_1 - x_{M1}$$

$$\zeta_2 = \theta_1(x_2 - x_1) - \theta_1(x_{M2} - x_{M1})$$

$$\begin{aligned} \zeta_3 &= -\theta_1^2(x_2 - x_1) + \theta_1((\theta_2 - \theta_1)x_1 - x_1 x_3 + \theta_2 x_2) + \theta_1^2(x_{M2} - x_{M1}) - \theta_1((\theta_2 - \theta_1)x_{M1} \\ &\quad - x_{M1}x_{M3} + \theta_2 x_{M2}) \end{aligned}$$

Donde u está definido como

$$u = \frac{1}{L_g L_f^2 h(x)} (v - L_f^3 h(x) + L_{fM}^3 h_M(x_M) + L_{gM} L_{fM}^2 h_M(x_M) u_M)$$

Sustituyendo,

$$u = \frac{1}{-\theta_1 x_1} (v - \theta_1((\theta_2 - x_3)\dot{x}_1 + (\theta_2 - \theta_1)\dot{x}_2 - x_1(x_1 x_2 - \theta_3 x_3)) + \theta_1((\theta_2 - x_{M3})\dot{x}_{M1} + (\theta_2 - \theta_1)\dot{x}_{M2} - x_{M1}(x_{M1} x_{M2} - \theta_3 x_{M3})) - \theta_1 x_{M1} u_M)$$

Siendo v , definido como

$$v = -C\zeta = -c_0\zeta_1 - c_1\zeta_2 - c_2\zeta_3$$

Eligiendo los polos en -3, obtenemos $C = (27 \quad 27 \quad 9)$.

La ley de control tiene una restricción debió a que el termino $L_g L_f^2 h(x)$ depende de uno de los estados del sistema, por lo cual en algún momento, cuando el estado $x_1 = 0$, se indeterminada la ley de control.

Para intentar solucionar lo anterior plantearemos un cambio en la manera en que se elige la entrada a los osciladores caóticos, de tal forma que el grado relativo del sistema sea $r = 2$

Sea el oscilador P la planta, y M el modelo, cuyos parámetros son idénticos,

$$P \begin{cases} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{cases} = \begin{bmatrix} \theta_1(x_2 - x_1) \\ (\theta_2 - \theta_1)x_1 - x_1 x_3 + \theta_2 x_2 \\ x_1 x_2 - \theta_3 x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = x_1$$

$$M \begin{cases} \dot{x}_{M1} \\ \dot{x}_{M2} \\ \dot{x}_{M3} \end{cases} = \begin{bmatrix} \theta_1(x_{M2} - x_{M1}) \\ (\theta_2 - \theta_1)x_{M1} - x_{M1} x_{M3} + \theta_2 x_{M2} \\ x_{M1} x_{M2} - \theta_3 x_{M3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_M$$

$$y = x_{M1}$$

Cambiando de coordenadas el sistema:

$$L_g h(x) = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$L_f h(x) = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \theta_1(x_2 - x_1) \\ (\theta_2 - \theta_1)x_1 - x_1 x_3 + \theta_2 x_2 \\ x_1 x_2 - \theta_3 x_3 \end{bmatrix} = \theta_1(x_2 - x_1)$$

$$\frac{\partial L_f h(x)}{\partial x} = [-\theta_1 \quad \theta_1 \quad 0]$$

$$L_g L_f h(x) = [-\theta_1 \quad \theta_1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \theta_1 \neq 0$$

$$L_f^2 h(x) = [-\theta_1 \quad \theta_1 \quad 0] \begin{bmatrix} \theta_1(x_2 - x_1) \\ (\theta_2 - \theta_1)x_1 - x_1x_3 + \theta_2x_2 \\ x_1x_2 - \theta_3x_3 \end{bmatrix} \\ = -\theta_1^2(x_2 - x_1) + \theta_1((\theta_2 - \theta_1)x_1 - x_1x_3 + \theta_2x_2)$$

De tal modo que nos queda,

$$z_1 = \varphi_1 = h(x) = x_1 \\ z_2 = \varphi_2 = L_f h(x) = \theta_1(x_2 - x_1)$$

Y buscaremos una función para φ_3 tal que:

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} g(x) = \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} = 0$$

Se propone $\varphi_3 = x_3$, lo cual satisface la condición anterior. Esta y las dos funciones anteriores definen la transformación de coordenadas del sistema, cuya matriz jacobina está dada por:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\theta_1 & \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La cual es no singular e invertible.

Teniendo en cuenta que tanto P como M son sistemas idénticos, el cambio de coordenadas para M sería de forma similar al cambio en P . El sistema axilar E expresado en nuevas coordenadas queda de la siguiente manera:

$$\zeta_1 = x_1 - x_{M1} \\ \zeta_2 = \theta_1(x_2 - x_1) - \theta_1(x_{M2} - x_{M1}) \\ \zeta_3 = x_3 - x_{M3}$$

Donde u está definido como

$$u = \frac{1}{L_g L_f h(x)} (v - L_f^2 h(x) + L_{fM}^2 h_M(x_M) + L_{gM} L_{fM} h_M(x_M) u_M)$$

Sustituyendo,

$$u = \frac{1}{\theta_1} (v + \theta_1^2 (x_2 - x_1) - \theta_1 ((\theta_2 - \theta_1)x_1 - x_1x_3 + \theta_2x_2) - \theta_1^2 (x_2 - x_1) + \theta_1 ((\theta_2 - \theta_1)x_1 - x_1x_3 + \theta_2x_2) + \theta_1 u_w)$$

Siendo v , definido como

$$v = -C\zeta = -c_0\zeta_1 - c_1\zeta_2 - c_2\zeta_3$$

Eligiendo los polos en -3, obtenemos $C = (27 \quad 27 \quad 9)$.

La ley de control ya no tiene la restricción debió a que el termino $L_g L_f h(x)$ ya no depende de ningún estado del sistema.

Finalmente, analizaremos la dinámica interna del sistema (dinámica cero).

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 & x_1 &= z_1 \\ z_2 &= \theta_1(x_2 - x_1) & x_2 &= \frac{z_2}{\theta_1} + x_1 = \frac{z_2}{\theta_1} + z_1 \\ z_3 &= x_3 & x_3 &= z_3 \end{aligned}$$

Quedando expresado el sistema en nuevas coordenadas,

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \theta_1 \left[(\theta_2 - \theta_1)z_1 - z_1z_3 + \theta_2 \left(\frac{z_2}{\theta_1} + z_1 \right) + u - z_2 \right] \\ \dot{z}_3 &= z_1 \left(\frac{z_2}{\theta_1} + z_1 \right) - \theta_3 z_3 \end{aligned}$$

Con $z_1 = z_2 = 0$ nos queda,

$$\dot{z}_3 = -\theta_3 z_3$$

Considerando el sistema auxiliar, nos queda que la dinámica cero del sistema auxiliar está gobernada por

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_3 &= -\theta_3 z_3 + \theta_3 z_{M3} \\ \dot{\zeta}_3 &= -\theta_3 (z_3 - z_{M3}) \\ \dot{\zeta}_3 &= -\theta_3 \zeta_3 \end{aligned}$$

La cual es asintóticamente estable.

Solución:

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_3 &= -\theta_3 \zeta_3 \\ \frac{d\zeta_3}{dt} &= -\theta_3 \zeta_3 \\ \int \frac{d\zeta_3}{\zeta_3} &= \int -\theta_3 dt \\ \ln(\zeta_3) &= -\theta_3 t \\ \zeta_3 \Big|_{\zeta_{31}}^{\zeta_{30}} &= e^{-\theta_3 t} \Big|_{t_1}^{t_0}\end{aligned}$$

Se realizaron simulaciones para comprobar que la ley de control logra sincronizar ambos osciladores caóticos partiendo de las siguientes condiciones iniciales:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 6, \quad x_{M1} = 5, \quad x_{M2} = 8, \quad x_{M3} = 1$$

De un tiempo inicial $t_0 = 0$ a un tiempo final $t_f = 10$, figuras 2, 3, 4 y 5.

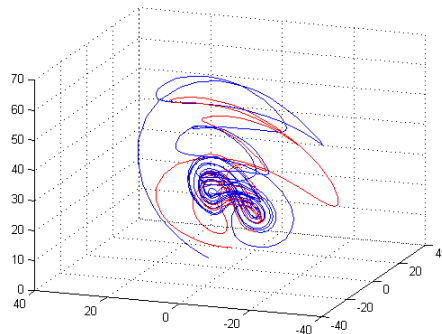


Figura 2 Vista 3D de los osciladores caóticos.

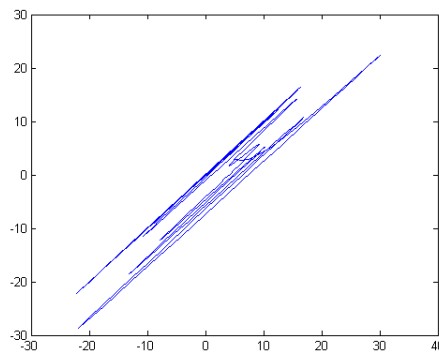


Figura 3 Trazo de los estados x_1 vs x_{1m} .

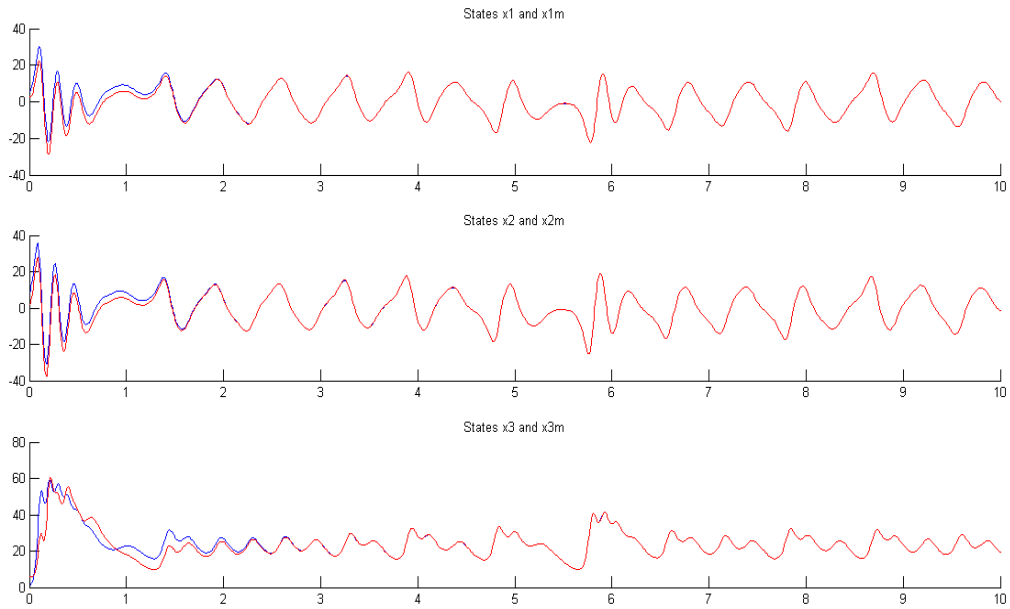


Figura 4 Señales temporales en la sincronización de dos sistemas de Chen.

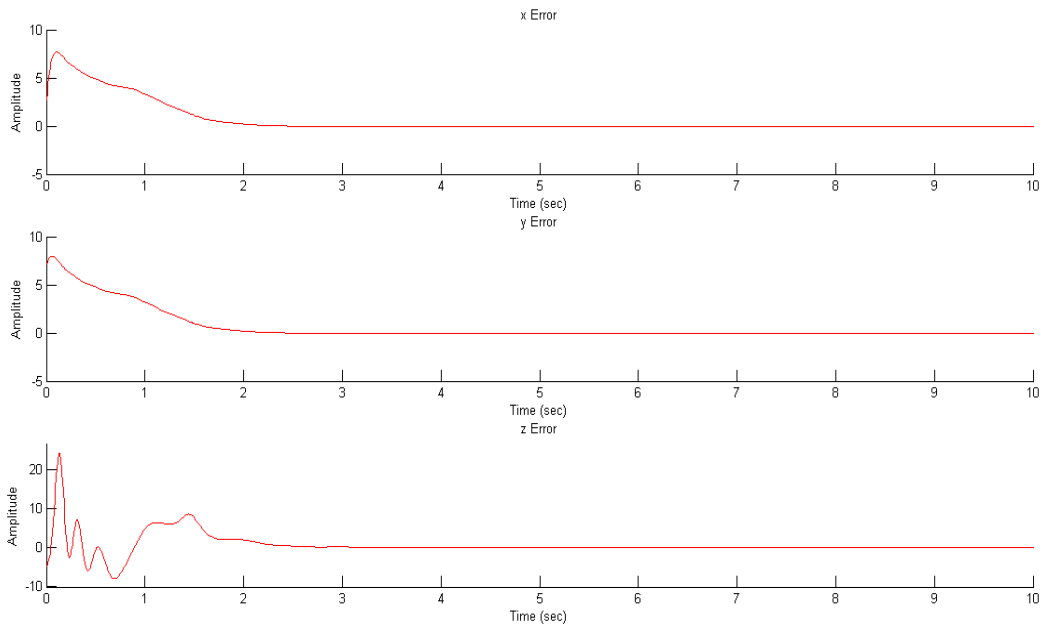


Figura 5 Señales error sincronización, tres estados en sincronización, dos sistemas Chen.

Sincronización de redes de sistemas complejos

Desde el punto de vista matemático, una red puede ser representada por un grafo. En donde dos nodos (vértices o puntos) unidos por una conexión (aristas o

líneas) son llamados nodos adyacentes o vecinos. Algunas de las características más destacables que presentan los sistemas complejos son:

- Están compuestos de muchas partes que interactúan entre sí (nodos).
- Cada parte tiene estructura interna propia y está encargada de una tarea específica.

La topología o acoplamiento es la disposición o la forma en que están conectados los nodos de una red, mientras que la configuración es el tipo de conexión que determina el flujo de información entre nodos, figura 6.



Figura 6 Configuración unidireccional (Maestro-esclavo). (b) Configuración bidireccional.

La matriz de acoplamiento $A = (a_{ij}) \in R^{N \times N}$ representa el acoplamiento de la red. Si existe una conexión entre el nodo i y el nodo j entonces el elemento $a_{ij} = 1$ en caso contrario $a_{ij} = 0$. Los elementos de la diagonal A están definidos como:

$$a_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ji}$$

para $i = 1, 2, \dots, N$

Tomando en cuenta estas definiciones tomadas de la teoría de grafos, así como haciendo algunas adecuaciones, podemos formular una ley generalizada que nos permita sincronizar redes complejas de N sistemas utilizando el esquema de Acoplamiento a Modelos, y adaptando a nuestro esquema en particular la matriz de acoplamiento, tomando en cuenta que el esquema de Acoplamiento a Modelos impone las siguientes restricciones:

- El acoplamiento solo puede ser de tipo unidireccional, ya que el esquema de Acoplamiento a Modelos requiere una configuración Maestro-Esclavo.
- Un nodo (o sistema caótico) solo puede estar acoplado a un maestro. Aunque un maestro lo puede ser para varios nodos.

3. Resultados en sincronización de redes de sistemas complejos

Considere una red compuesta por 5 osciladores caóticos de Rössler, con grado relativo $r=3$.

$$R_i \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_{i1} \\ \dot{x}_{i2} \\ \dot{x}_{i3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_{i2} - x_{i3} \\ x_{i1} + \alpha x_{i2} \\ \alpha x_{i3}(x_{i1} - \mu) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_i \\ y_i = x_{i2} \end{cases}$$

Donde R_i son los sistemas caóticos de Rössler, para $i = 1, 2, \dots, 5$.

Podemos ahora considerar la ley de control u_i que se mostró en la sección previa, como sigue:

$$u_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} u_{ij}$$

O también como:

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11}u_{11} + a_{12}u_{12} + \dots + a_{1N}u_{1N} \\ u_2 &= a_{21}u_{21} + a_{22}u_{22} + \dots + a_{2N}u_{2N} \\ u_N &= a_{N1}u_{N1} + a_{N2}u_{N2} + \dots + a_{NN}u_{NN} \end{aligned}$$

Donde:

$$u_{ij} = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(X_i)} (V_{ij} - L_f^r h(X_i) + L_f^r h(X_j) + L_g L_f^{r-1} h(X_j) * \hat{u}_j)$$

Ahora, consideremos la siguiente topología estrella de acoplamiento para los 5 osciladores idénticos de Rössler, mostrada en la figura 7, donde el nodo número 1 es el maestro para el resto de los nodos, y cuya matriz de acoplamiento A que representa dicha topología está definida como:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

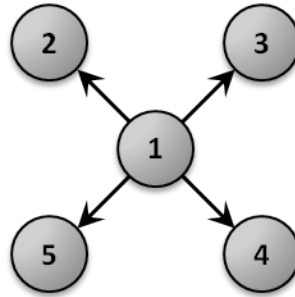


Figura 7 Topología estrella de acoplamiento 5 sistemas Rössler.

Las 5 leyes de control resultantes para cada sistema quedan como:

$$u_1 = 0$$

$$u_2 = u_{21} = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(X_2)} (V_{21} - L_f^r h(X_2) + L_f^r h(X_1) + L_g L_f^{r-1} h(X_1) * \hat{u}_1)$$

$$u_3 = u_{31} = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(X_3)} (V_{31} - L_f^r h(X_3) + L_f^r h(X_1) + L_g L_f^{r-1} h(X_1) * \hat{u}_1)$$

$$u_4 = u_{41} = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(X_4)} (V_{41} - L_f^r h(X_4) + L_f^r h(X_1) + L_g L_f^{r-1} h(X_1) * \hat{u}_1)$$

$$u_5 = u_{51} = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(X_5)} (V_{51} - L_f^r h(X_5) + L_f^r h(X_1) + L_g L_f^{r-1} h(X_1) * \hat{u}_1)$$

Y considerando la señal externa $\hat{u}_1 = 0$, figuras 8 y 9.

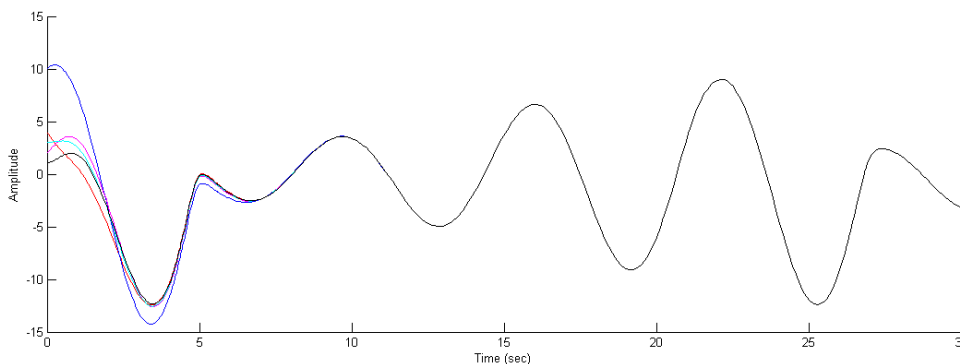


Figura 8 Sincronización red compuesta 5 osciladores de Rössler, acoplamiento estrella.

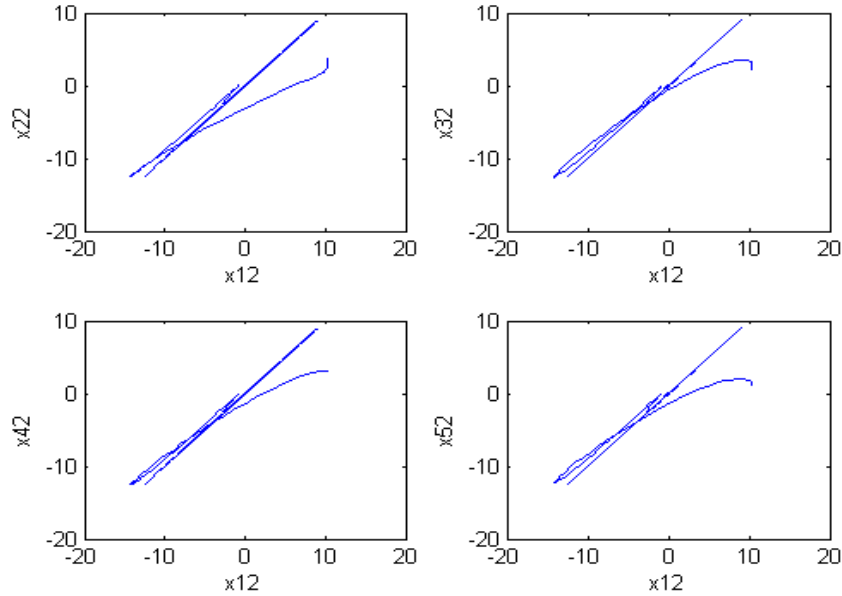


Figura 9 Sincronización de las salidas x_{12} y x_{i2} , for $i = 2, 3, 4, 5$.

4. Conclusiones

En este trabajo se presenta la sincronización de osciladores caóticos usando acoplamiento a modelos. Primero se trató el tema para una pareja de osciladores caóticos y posteriormente se extendió a una red de cinco osciladores en topología estrella. Se puede observar que la técnica de Acoplamiento a Modelos es totalmente sistemática. Es decir, la técnica se puede seguir paso a paso y se puede adaptar a la sincronización de redes de osciladores caóticos.

En algunos casos, la ley de control puede contener denominadores que dependan de alguno de los estados, siendo esto una restricción, debido a que en algún momento este puede indeterminar la ley de control, cuando el estado fuera igual a cero. Una solución puede ser adecuar las condiciones iniciales y alcanzar sincronía antes que el estado sea igual a cero, mediante ganancias muy grandes en el sistema auxiliar, lo cual es poco conveniente. En este trabajo se optó por elegir un *grado relativo* menor, con lo que la restricción se eliminó. Elegir un grado relativo menor implica generar dinámicas cero, pero se presentó el análisis de estabilidad de dichas dinámicas. Se obtuvo una expresión generalizada de la ley de control que nos permite sincronizar una red compleja, utilizando Acoplamiento a Modelos y basándonos en conceptos tomados de la teoría de grafos. Además,

se realizaron simulaciones numéricas considerando diferentes topologías de acoplamiento, incluyendo en algunos casos acoplamiento bidireccional.

5. Bibliografía y Referencias

- [1] S.H. Strogatz, "SYNC: The Emerging Science of Spontaneous Order". SIAM Review. Vol. 45. No. 3. 2003. Pp. 616-617.
- [2] E.N. Lorenz, "Deterministic nonperiodic flow". Journal of the Atmospheric Sciences. Vol. 32. No. 4. 1963. Pp. 475-480.
- [3] L. Bernardo, P.B. Lopes, "Quadrature Chaotic Symbolic OFDM Communication Over Radio Channels". IEEE Latin America Trans. Vol. 11. No. 3. 2013. Pp. 907-912.
- [4] K.M. Cuomo, A.V. Oppenheim, S.H. Strogatz, "Synchronization of Lorenz-based chaotic circuits with applications to communications". IEEE Trans. Circuits Syst. II. Vol. 40. No. 10. 1993. Pp. 626-633.
- [5] C.W. Wu, L.O. Chua, "A simple way to synchronize chaotic systems with applications to secure communication systems". Int. J. Bifurc. Chaos. Vol. 3. No. 6. 1993. Pp. 1619-1627.
- [6] L. Kocarev, K.S. Halle, K. Eckert, L.O. Chua, "Experimental demonstration of secure communications via chaotic synchronization". Int. J. Bifurc. Chaos. Vol. 2. No. 3. 1992. Pp. 709-713.
- [7] P. Tass, M.G. Rosenblum, J. Weule, J. Kurths, A. Pikovsky, J. Volkmmann, A. Schnitzler, H.J. Freund, "Detection of n:m phase locking from noisy data: Application to magnetoencephalography". Phys. Rev. Lett. Vol. 81. No. 15. 1998. Pp. 3291-3294.
- [8] F. Mormann, K. Lehnertz, P. David, C.E. Elger, "Mean phase coherence as a measure for phase synchronization and its application to the EEG of epilepsy patients". Physica D. Vol. 144. 2000. Pp. 358-369.
- [9] M.B. Lotric, A. Stefanovska, "Synchronization and modulation in the human cardiorespiratory system". Physica A. Vol. 283. No. 3-4. 2000. Pp. 451-461.
- [10] A.T. Winfree, "Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators". J. Theor. Biol. Vol. 16. 1967. Pp. 15-42.

- [11] L.M. Pecora, T.L. Carroll, "Synchronization in chaotic systems". *Physical review letters*. Vol. 64. No. 8. 1990. Pp. 821-825.
- [12] J. Zhao, S. Wang, Y. Chang, "A novel image encryption scheme based on an improper fractional-order chaotic system". *Nonlinear Dynamics*. Vol. 80. No. 4. 2015. Pp. 1721-1729.
- [13] Q. Fang, J. Peng, F. Cao, "Synchronization and Control of Linearly Coupled Singular Systems". *Mathematical Problems in Engineering*. Vol. 2014. No. 230741. 2014. Pp. 1-8.
- [14] O. García-Sepúlveda, *Encriptado de datos con osciladores caóticos de orden fraccionario*. Tesis de maestría. Universidad Autónoma de Nuevo León. FIME. 2015.
- [15] M. Zanin, J.R. Sevilla-Escoboza, R. Jaimes-Reátegui, J.H. García-López, G. Huerta-Cuéllar, A. Pisarchik, "Synchronization attack to chaotic communications systems". *Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity*. Vol. 2. No. 4. 2013. Pp. 333-343.
- [16] A.G. Soriano-Sánchez, C. Posadas-Castillo, M.A. Platas-Garza, "Synchronization of generalized Chua's chaotic oscillators in small-world topology". *Journal of Engineering Science and Technology Review*. Vol. 8. No. 2. 2015. Pp. 174-180.
- [17] M. Ding, W. Yang, "Synchronizing Chaos and Hyperchaos with Any Scalar Transmitted Signal". *IEEE Transactions on Circuits & Systems Part I: Fundamental Theory & Applications*. Vol. 45. No. 10. 1996. Pag. 1101.
- [18] D. López-Mancilla, *Sincronización de osciladores caóticos perturbados con aplicación a sistemas de comunicaciones*. Tesis Doctoral. CICESE. Ensenada, Baja California. 2015.

6. Autores

Dr. Didier López Mancilla es Ingeniero en Electrónica, graduado del Instituto Tecnológico de Tuxtla Gutiérrez, ITTG. Realizó una Maestría en Ingeniería Eléctrica en la Universidad de Guanajuato y obtuvo su Doctorado en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones en el Centro de Investigación Científica y de

Educación Superior de Ensenada, CICESE. Actualmente es Profesor Investigador en la Universidad de Guadalajara y trabaja en temas afines a sincronización y control de sistemas complejos y algunas aplicaciones potenciales.

Ing. Gerardo López Cahuich es Ingeniero en Mecatrónica por la Universidad de Guadalajara. Actualmente cursa la Maestría en Ciencias en Ciencia y Tecnología en el Centro Universitario de los Lagos de la Universidad de Guadalajara.