

# **DISEÑO, MODELADO Y SIMULACIÓN DE UN SISTEMA SUBACTUADO DENOMINADO PÉNDULO AXIAL**

## *DESIGN, MODELING AND SIMULATION OF AN UNDERACTUAL SYSTEM CALLED AXIAL PENDULUM*

**David Fuentes Díaz**

Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, México  
*david.fuentes@alumnos.uacj.mx*

**Israel Ulises Ponce Monarrez**

Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, México  
*israel.ulises@uacj.mx*

**Adriana Salinas Ávila**

Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, México  
*adriana.salinas@uacj.mx*

**Manuel de Jesús Nandayapa Alfaro**

Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, México  
*mnandaya @uacj.mx*

**Recepción:** 22/noviembre/2023

**Aceptación:** 26/diciembre/2023

### **Resumen**

Los sistemas subactuados pendulares constituyen plataformas experimentales completas e interesante en la ingeniería de control no lineal, el entendimiento de este tipo de sistemas facilita el análisis y diseño de controladores de sistemas más complejos basados en sistemas pendulares subactuados. En este artículo se presenta un robot de dos grados de libertad (2GDL) del tipo subactuado, denominado péndulo axial, del cual no se encontró su modelo dinámico en la literatura consultada. Para el estudio del péndulo axial, se realiza el diseño del mecanismo, así como la obtención de los parámetros físicos obtenidos mediante el software SolidWorks. Posteriormente, se obtiene su modelo dinámico mediante la formulación de Euler Lagrange, que junto con los parámetros del sistema permite simular el modelo y la experimentación del sistema real. Se presentan algunas simulaciones que ayudan a validar el modelo dinámico obtenido.

**Palabras Clave:** Euler Lagrange, Modelado dinámico, Péndulo axial, Sistema subactuado.

## **Abstract**

*Pendulum-type underactuated systems constitute complete and interesting experimental platforms in the field of nonlinear control engineering. Understanding this type of system facilitates the analysis and design of controllers for more complex systems based on underactuated pendulum systems. This article presents a two-degree-of-freedom (2-DOF) underactuated robot called the axial pendulum, for which no dynamic model was found in the consulted literature. For the study of the axial pendulum, the mechanism is designed, and the physical parameters are obtained using SolidWorks software. Subsequently, its dynamic model is derived using the Euler-Lagrange formulation, which, along with the system parameters, allows for the simulation of the model and experimentation with the real system. Several simulations are presented to help validate the obtained dynamic model.*

**Keywords:** *Axial pendulum, Euler Lagrange, Dynamic modeling, Underactuated system.*

## **1. Introducción**

La teoría de control es una disciplina que se enfoca en el estudio tanto de sistemas lineales como no lineales [Portillo, 2017]. Dentro de esta rama, los sistemas subactuados emergen como una categoría particular de sistemas no lineales. El término subactuado hace referencia a la situación en la que no todos los grados de libertad (GDL) o uniones de un sistema poseen un actuador que los controle directamente [Gutierrez, 2009]. En otras palabras, en los sistemas subactuados, el número de actuadores es menor que el número de grados de libertad.

La relevancia del control de sistemas subactuados es destacable en la actualidad debido a su amplio espectro de aplicaciones en campos como la robótica, la aeroespacial y los vehículos marinos [Antonio, 2018]. No obstante, el análisis y la implementación de técnicas de control en estos sistemas presentan un desafío debido a su complejidad inherente. Por lo tanto, surge la posibilidad de abordar sistemas menos sofisticados, como los péndulos, con el objetivo de comprender y desarrollar técnicas de control más efectivas.

Los sistemas subactuados pendulares se presentan como dispositivos de prueba sumamente completos e interesante en el ámbito de la ingeniería de control no lineal [Gutierrez, 2009]. A pesar de su aparente complejidad, es factible realizar aproximaciones que los consideren como sistemas lineales [Antonio, 2018]. La aplicación de técnicas de control no lineal en estos sistemas brinda un mayor entendimiento de su comportamiento físico y, por ende, produce resultados más efectivos en su control [Anzures, 2008].

En términos generales, es importante destacar que los sistemas subactuados pendulares pueden tener varios puntos de equilibrio, y la convergencia hacia uno de estos puntos depende en gran medida del estado inicial. Por lo tanto, se vuelve esencial estudiar la estabilidad de los diversos puntos de equilibrio en sistemas no lineales, lo que conduce a una comprensión más profunda del comportamiento del péndulo [Anzures, 2008]. Sin embargo, es crucial señalar que estos sistemas presentan limitaciones en términos de controlabilidad, lo que impide la aplicación de las leyes de control clásicas para estabilizar el péndulo en su punto de equilibrio inestable [Gutiérrez, 2009]. Estas limitaciones son un área de interés activo en la investigación en control, ya que plantean desafíos significativos en el diseño de estrategias de control efectivas para sistemas subactuados pendulares.

En la literatura se han estudiado ampliamente los sistemas pendulares [Duarte, 2016], [Tang, 2009], [Valera, 2002], [Villalobos, 2019], los cuales han sido utilizados como plataformas experimentales de sistemas no lineales utilizadas para probar la efectividad de los controladores. Entre los sistemas pendulares, destaca el péndulo de Furuta o péndulo rotatorio invertido [Homburger, 2022], [Cholodowicz, 2022], el cual consiste en un eslabón actuado que gira en el plano horizontal, y este se encuentra unido a un segundo eslabón no actuado, el cual gira en el plano vertical. Otro sistema pendular muy estudiado, es el sistema conocido como acrobot [Fan, 2023], un robot planar con un actuador no actuado en la primera articulación. También se tiene el pendubot [Pazderski, 2022], una plataforma de doble péndulo invertido con el primer eslabón actuado y el segundo eslabón pasivo. Se tienen otros más como el péndulo esférico [Alvarado, 2010], y el clásico péndulo invertido. Finalmente, el péndulo axial es un mecanismo de tipo subactuado que cuenta con

dos articulaciones rotacionales, la primera tiene un movimiento rotacional actuado sobre el plano horizontal, y la segunda articulación rotacional no actuada se encuentra conectada axialmente al primer eslabón, este mecanismo no es muy estudiado y no se encontró su modelo dinámico en la literatura consultada.

Un modelo dinámico está compuesto de parámetros cinemáticos y dinámicos, los parámetros cinemáticos pueden ser encontrados con facilidad en la hoja de datos del robot del fabricante, sin embargo, los parámetros dinámicos que son la inercia y fricción en muy pocas ocasiones son otorgados. La estimación de estos parámetros dinámicos, a través de herramientas de diseño asistido por computadora (CAD) es complejo debido a la dificultad de obtener un modelo (dibujo mecánico) que represente de forma precisa el mecanismo a estudio [Bahloul, 2018]. En el caso de tener los dibujos CAD con buena exactitud, es posible la obtención de la mayoría de los parámetros físicos del brazo mecánico, realizando algunas configuraciones en cuanto la colocación de referencias, como el de un eje de coordenadas y alineación de los centros de los ejes rotación.

Además, el análisis del modelo que caracteriza al manipulador puede ser de utilidad durante el diseño mecánico, el cálculo de fuerzas y pares necesarios, siendo estos útiles para el diseño las articulaciones, actuadores y transmisiones, o bien, para la selección de éstos [Siciliano, 2009].

El modelado dinámico es desarrollado mediante el formulismo de Euler Lagrange, el cual trabaja con la energía cinética y potencial del sistema, como solución se obtienen las ecuaciones que definen el movimiento en términos de posición, velocidad, aceleración, y la fuerza aplicada a los actuadores del mecanismo. La obtención del modelo dinámico y generación del diagrama a bloques del sistema mecánico multicuerpo facilitan la aplicación de controladores sin la necesidad de construir el mecanismo para experimentación.

Este trabajo tiene como objetivo la obtención y validación del modelo dinámico del péndulo axial, lo cual facilitará su análisis y el diseño de controladores tomando en cuenta la dinámica del mecanismo. Para ello, primero se muestra el diseño del mecanismo, así como los componentes utilizados para su construcción. Posteriormente, se obtienen los parámetros utilizando las herramientas de

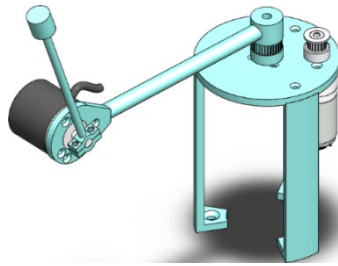
SolidWorks. Partiendo del diseño, se obtiene su modelo dinámico, que luego es validado a través de distintas simulaciones en Simulink de Matlab. Enseguida se discuten los resultados obtenidos y se dan algunas conclusiones.

## **2. Métodos**

En este apartado se presenta la descripción de la plataforma de experimentación que se desea diseñar, modelar y simular, donde se incluye el listado de los parámetros físicos, características mecánicas e instrumentación, así como la obtención del modelo que describe la dinámica del sistema.

### **Diseño del péndulo axial**

El sistema robótico estudiado trata de un robot de dos grados de libertad (2GDL), de articulaciones rotacionales de libre rotación, la primera articulación tiene un movimiento rotacional sobre el plano, la segunda articulación se encuentra conectada axialmente al extremo del primer eslabón, la rotación generada por esta última articulación permite que el sistema tenga un movimiento en el espacio tridimensional, figura 1.



*Fuente: elaboración propia.*

Figura 1 Péndulo axial, vista isométrica.

Las piezas que conforman el mecanismo serán impresas en 3D (Figura 2). Se ha utilizado como material de impresión el termoplástico PLA (Ácido Poliláctico). Para la implementación del péndulo axial y a fin de obtener sus parámetros, se consideran los materiales que conformarán al robot experimental:

- Motorreductor Metálico 25DX67Lmm HP de 12 V, reducción 34:1, encoder con una resolución de 48 pulsos por revolución.

- Anillo deslizante (Srm-12-06a).
- Polea Dentada de Aluminio GT2 – T20 W6, para eje de 4 mm de diámetro.
- Correa Dentada Cerrada GT2 – P2, W6, de 112 mm.
- Rodamientos rígidos de bolas de 8 x 12 x 3,5 mm, uxcell MR128-2RS de doble sellado ABEC-3.
- Controlador Puente H BTS7960 – 5 V, 43 A.
- Codificador rotatorio Incremental Fotoeléctrico AB 2 Fases, DC 5-24 V, con una resolución de 600 P/R, con eje de 6 mm.



Fuente: elaboración propia.

Figura 2 Piezas de instrumentación.

Partiendo del diseño del sistema robótico (Figura 1) y de los distintos componentes (Figura 2) a utilizar se lleva a cabo la parametrización. La estimación de los parámetros (Tabla 1) es realizada mediante el uso de SolidWorks, debido a que se cuenta con las piezas y el ensamblaje del manipulador.

Tabla 1 Parámetros del péndulo axial.

Parámetros	Símbolo	Valor	Unidad
Longitud del primer eslabón	$l_1$	165	mm
Longitud del segundo eslabón	$l_2$	120	mm
Masa del primer eslabón	$m_1$	169.27	g
Masa del segundo eslabón	$m_2$	7.90	g
Distancia del centro de masa del primer eslabón	$l_{c1}$	149.44	mm
Distancia del centro de masa del segundo eslabón	$l_{c2}$	66.33	mm
Inercia respecto al centro de masa del primer eslabón	$I_1$	4156281.77	$g \cdot mm^2$
Inercia respecto al centro de masa del segundo eslabón	$I_2$	53255.63	$g \cdot mm^2$

Fuente: elaboración propia.

## Modelo dinámico

El desarrollo de las ecuaciones de Euler-Lagrange, en la descripción de robots manipuladores mediante modelos dinámicos, se reduce a lo siguiente: primero se escriben las energías potenciales y cinéticas del sistema en estudio en coordenadas generalizadas  $[q_1, q_2, \dots, q_n]$ , donde  $n$  es el número de grados de libertad del sistema, posteriormente se construye el Lagrangiano, que es la diferencia de estas energías cinética y potencial, y por último se desarrollan las ecuaciones diferenciales de Lagrange [Spong, 2020].

Las ecuaciones de Lagrange que determinan el modelo de un robot de  $n$  grados de libertad (gdl) están dadas por la ecuación 1 [Kelly, 2005].

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

La energía cinética total puede descomponerse en la suma de los términos conforme a los  $n$  eslabones del mecanismo, ecuación 2. Similarmente, la energía potencial, dada por la ecuación 3, es compuesta por la suma de las energías potenciales que involucran a las masas  $m$  de los  $n$  eslabones.

$$K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = K_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + K_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \dots, K_n(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (2)$$

$$U(\mathbf{q}) = U_1(\mathbf{q}) + U_2(\mathbf{q}), \dots, U_n(\mathbf{q}) \quad (3)$$

Asimismo, las ecuaciones pueden ser descritas en forma compacta mediante matrices, de acuerdo con la ecuación 4.

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (4)$$

Donde, para el caso en estudio con  $n = 2$ , las matrices  $M$ ,  $C$ , y  $\mathbf{g}$  tienen la forma de las ecuaciones 5, 6 y 7 respectivamente.

$$M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} M_{11}(\mathbf{q}) & M_{12}(\mathbf{q}) \\ M_{21}(\mathbf{q}) & M_{22}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} C_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & C_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ C_{21}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & C_{22}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{q}) \\ g_2(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (7)$$

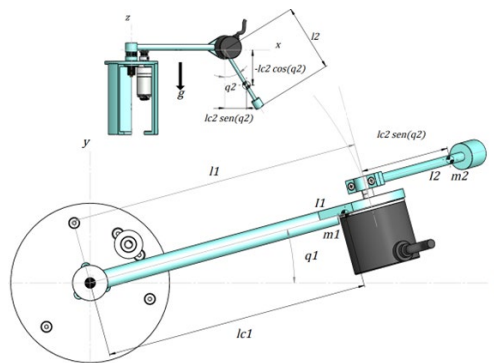
Con  $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  como la matriz de inercias,  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  es la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis, y  $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^2$  corresponde al vector de fuerzas

gravitacionales. Además, se tiene que  $q \in \mathbb{R}$  es el vector de posiciones articulares del brazo robótico, y  $\tau \in \mathbb{R}$  es el vector de par aplicado a cada actuador, respectivamente. El sistema en estudio es de dos grados de libertad, por lo que  $q = [q_1 \quad q_2]^T$ , y el vector de pares aplicados estará definido por  $\tau = [\tau_1 \quad \tau_2]^T$ . Para el caso que se estudia en particular, consideramos que  $\tau_2 = 0$ , tratándose entonces de un sistema subactuado.

### Energía cinética

Considerando el sistema del péndulo axial (Figura 3), para la obtención de sus ecuaciones dinámicas, se inicia determinando la energía cinética  $K(q, \dot{q})$ , definida en ecuación 2, de lo que se tendrá la ecuación 8. Correspondiendo a las energías cinéticas asociadas a las masas  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente.

$$K(q, \dot{q}) = K_1(q, \dot{q}) + K_2(q, \dot{q}), \quad (8)$$



Fuente: elaboración propia.

Figura 3 Esquemático del péndulo axial.

Primero, se definen las coordenadas al centro de masa del primer eslabón, pertenecientes al plano tridimensional  $x$ - $y$ - $z$ , las cuales están dadas en ecuación 9. De ahí, se obtiene la derivada temporal del vector de coordenadas,  $v_1$  del primer eslabón, el cual se define como en la ecuación 10.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c1} \cos(q_1) \\ l_{c1} \sin(q_1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$v_1 = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{c1} \sin(q_1) \\ l_{c1} \cos(q_1) \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1 \quad (10)$$



Por tanto, el cuadrado de la derivada temporal del vector de coordenadas al centro de masa del primer eslabón esta dado en la ecuación 11.

$$\|v_1\|_2^2 = l_{c1}^2 \sin^2(q_1) \dot{q}_1^2 + l_{c1}^2 \cos^2(q_1) \dot{q}_1^2, \quad (11)$$

Factorizando y aplicando la propiedad trigonométrica  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , se tendrá la ecuación 12. Por último, la ecuación que describe la energía cinética provocada por el movimiento del primer eslabón se tiene en la ecuación 13.

$$\|v_1\|_2^2 = l_{c1}^2 \dot{q}_1^2. \quad (12)$$

$$K_1(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_1 v_1^T v_1 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 = \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2. \quad (13)$$

Siguiendo este orden, se obtienen las coordenadas hacia el centro de masa del segundo eslabón ( $l_{c2}$ ), tal como se en la ecuación 14.

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [l_1 + l_{c2} \sin(q_2)] \cos(q_1) \\ [l_1 + l_{c2} \sin(q_2)] \sin(q_1) \\ -l_{c2} \cos(q_2) \end{bmatrix} \quad (14)$$

De igual forma, se aplica la derivada en el tiempo  $v_2$  del vector de coordenadas al centro de masa del segundo eslabón, esto se ve en la ecuación 15.

$$v_2 = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \cos(q_2) \cos(q_1) \dot{q}_2 - l_{c2} \sin(q_2) \sin(q_1) \dot{q}_1 \\ l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \cos(q_2) \sin(q_1) \dot{q}_2 + l_{c2} \sin(q_2) \cos(q_1) \dot{q}_1 \\ l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Por lo tanto, la velocidad al cuadrado  $\|v_2\|_2^2$  al centro de masa resulta lo mostrado en la ecuación 16.

$$\|v_2\|_2^2 = [-l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \cos(q_2) \cos(q_1) \dot{q}_2 - l_{c2} \sin(q_2) \sin(q_1) \dot{q}_1]^2 + [l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \cos(q_2) \sin(q_1) \dot{q}_2 + l_{c2} \sin(q_2) \cos(q_1) \dot{q}_1]^2 + [l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2]^2 \quad (16)$$

Aplicando la identidad trigonométrica  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ , se tiene que la velocidad al centro de masa del segundo eslabón ( $v_2$ ) está dada por ecuación 17.

$$\|v_2\|_2^2 = [l_1^2 + l_{c2}^2 \sin^2(q_2) + 2l_1 l_{c2} \sin(q_2)] \dot{q}_1^2 + l_{c2}^2 \dot{q}_2^2 \quad (17)$$

La energía cinética perteneciente al segundo eslabón, ecuación 18.

$$K_2(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_2 v_2^T v_2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{q}_2^2 \quad (18)$$

Sustituyendo la ecuación 17 en la ecuación 18, se tendrá que la energía cinética del segundo eslabón estará dada por la ecuación 19.

$$K_2(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 + l_{c2}^2 \sin^2(q_2) + 2l_1 l_{c2} \sin(q_2)] \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_{c2}^2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{q}_2^2 \quad (19)$$

### Energía potencial

De acuerdo con la figura 3, la energía potencial del sistema se reduce a  $U_2(q)$ , debido a que la energía potencial del primer eslabón ( $U_1$ ) es considerada nula, esto a causa del movimiento en el plano horizontal. Para determinar la energía potencial del segundo eslabón se obtiene la coordenada en z:  $-l_{c2} \cos(q_2)$ , ecuación 20.

$$U(q) = -m_2 g l_{c2} \cos(q_2) \quad (20)$$

### Formulación de Lagrange para el modelo del robot.

El Lagrangiano se obtiene de la diferencia de la energía cinética y la energía potencial, esto es lo dado en la ecuación 21.

$$L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - U(q) \quad (21)$$

Dado que se tienen dos eslabones, y de acuerdo con las ecuaciones 2 y 3, se tendrá que el Lagrangiano definido en la ecuación 21, estará dado por la ecuación 22.

$$L(q, \dot{q}) = K_1(q, \dot{q}) + K_2(q, \dot{q}) - U_1(q) - U_2(q) \quad (22)$$

Luego, sustituyendo las ecuaciones 13, 19 y 20 en ecuación 22, se obtiene el Lagrangiano del sistema, lo cual se observa en la ecuación 23.

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 + l_{c2}^2 \sin^2(q_2) + 2l_1 l_{c2} \sin(q_2)] \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_{c2}^2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{q}_2^2 + m_2 g l_{c2} \cos(q_2). \quad (23)$$

Resolviendo la formulación de las ecuaciones de Lagrange (Ecuación 23) para las coordenadas generalizadas  $q_1$  y  $q_2$ , se tiene la derivada parcial del Lagrangiano respecto a la velocidad angular  $q_1$ , ecuación 24. Seguidamente, en la ecuación 25 se deriva respecto al tiempo a la derivada parcial del Lagrangiano.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = [m_1 l_{c1}^2 + I_1 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 \sin^2(q_2) + 2m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2)] \dot{q}_1 \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right] &= [m_1 l_{c1}^2 + I_1 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 \sin^2(q_2) + 2m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2)] \ddot{q}_1 \\ &+ [2m_2 l_{c2}^2 \sin(q_2) \cos(q_2) + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2)] \dot{q}_1 \dot{q}_2 \end{aligned} \quad (25)$$

Y por último, en ecuación 26 se calcula la derivada parcial de la posición angular  $q_1$ .

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \quad (26)$$

De igual forma, se resuelve para la coordenada generalizada  $q_2$ . Primero, en la ecuación 27 se obtiene la derivada parcial del Lagrangiano respecto a la velocidad angular y mediante la ecuación 28 se encuentra la derivada respecto al tiempo. Finalmente, la derivada parcial del Lagrangiano respecto a la posición angular  $q_2$  se muestra en la ecuación 29.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = (I_2 + m_2 l_{c2}^2) \dot{q}_2 \quad (27)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right] = (I_2 + m_2 l_{c2}^2) \ddot{q}_2 \quad (28)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = m_2 l_{c2}^2 \sin(q_2) \cos(q_2) \dot{q}_1^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) \dot{q}_1^2 - m_2 g l_{c2} \sin(q_2) \quad (29)$$

### 3. Resultados

Como resultado principal de este artículo, se tienen las ecuaciones que describen la dinámica del péndulo axial, las cuales son presentadas a continuación. Posteriormente se hace un análisis del sistema obtenido, y se realizan algunas simulaciones.

#### Ecuaciones dinámicas del péndulo axial

Las ecuaciones dinámicas que modelan al robot pueden obtenerse utilizando las ecuaciones de Lagrange, por lo que, para el primer eslabón se tendrá la ecuación 30 y para el segundo eslabón la ecuación 31.

$$\begin{aligned} \tau_1 &= [m_1 l_{c1}^2 + I_1 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 \sin^2(q_2) + 2m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2)] \ddot{q}_1 \\ &+ [2m_2 l_{c2}^2 \sin(q_2) \cos(q_2) + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2)] \dot{q}_1 \dot{q}_2 \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} 0 &= (I_2 + m_2 l_{c2}^2) \ddot{q}_2 - [m_2 l_{c2}^2 \sin(q_2) \cos(q_2) + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2)] \dot{q}_1^2 \\ &+ m_2 g l_{c2} \sin(q_2) \end{aligned} \quad (31)$$

El modelo dinámico que rige al mecanismo péndulo axial está constituido por dos ecuaciones, una para cada articulación. Al tratarse de un sistema subactuado de dos grados de libertad, el movimiento del sistema estará dado únicamente por la fuerza externa  $\tau_1$ , la cual es aplicada a la primera articulación. Las ecuaciones 30 y 31 son conformadas por la diferencia de las ecuaciones 25 y 26 para la primera articulación, mientras que las ecuaciones 28 y 29 son utilizadas para la segunda.

### Fricción viscosa y representación en espacio de estados

La dinámica referida en las ecuaciones 30 y 31 suponen un sistema ideal, sin pérdidas de energía en su dinámica, lo cual no corresponde al modelo físico. Para que el modelo dinámico represente un tanto mejor el comportamiento del sistema podemos considerar al menos el efecto de la fricción viscosa, de ahí que se define las ecuaciones 32 y 33. Como las fuerzas de fricción viscosa que se oponen al movimiento, las cuales están acopladas a las entradas de control del sistema  $\tau_1$  y  $\tau_2$ , donde  $f_{v1}$  y  $f_{v2}$  representan los coeficientes de fricción viscosa en los eslabones 1 y 2 respectivamente. Para representar el sistema en espacio de estados, primero se define ecuación 34, donde  $x \in \mathbb{R}^4$ , como el vector de estados del sistema, y considerando ecuaciones 30 a 33, se tendrá la dinámica del péndulo axial en vector de estados, ecuación 35.

$$F_{f1} = f_{v1}\dot{q}_1 \quad (32)$$

$$F_{f2} = f_{v2}\dot{q}_2 \quad (33)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \dot{q}_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}, \quad (34)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{-(2m_2l_{c2}^2 \sin(x_3) \cos(x_3) + 2m_2l_1l_{c2} \cos(x_3))x_2x_4 - f_{v1}x_2 + \tau_1}{m_1l_{c1}^2 + I_1 + m_2l_1^2 + m_2l_{c2}^2 \sin^2(x_3) + 2m_2l_1l_{c2} \sin(x_3)} \\ x_4 \\ \frac{(m_2l_{c2}^2 \sin(x_3) \cos(x_3) + m_2l_1l_{c2} \cos(x_3))x_2^2 - m_2gl_{c2} \sin(x_3) - f_{v2}x_4}{I_2 + m_2l_{c2}^2} \end{bmatrix} \quad (35)$$

Los puntos de equilibrio del sistema nominal obtenidos a partir del sistema de la ecuación 35 cuando el sistema se encuentra sin cambio,  $\dot{x} = 0$ , están en  $\tilde{x} =$

$[\tilde{x}_1 \ 0 \ n\pi \ 0]^T \forall \tilde{x}_1 \in \mathbb{R}$  y  $n \in \mathbb{Z}$ . Los puntos de equilibrio estarán ubicados en cualquier posición del primer eslabón y con el segundo eslabón (péndulo) en posición vertical hacia arriba o hacia abajo.

## Resultados numéricos

Para analizar el comportamiento del sistema dinámico dado en la ecuación 35, se realizan algunas simulaciones en Simulink de Matlab versión R2021a, utilizando para la solución el algoritmo ode4 (Runge-Kutta) de paso fijo con un tiempo de muestreo de 0.001. En las simulaciones realizadas se consideran tres casos:

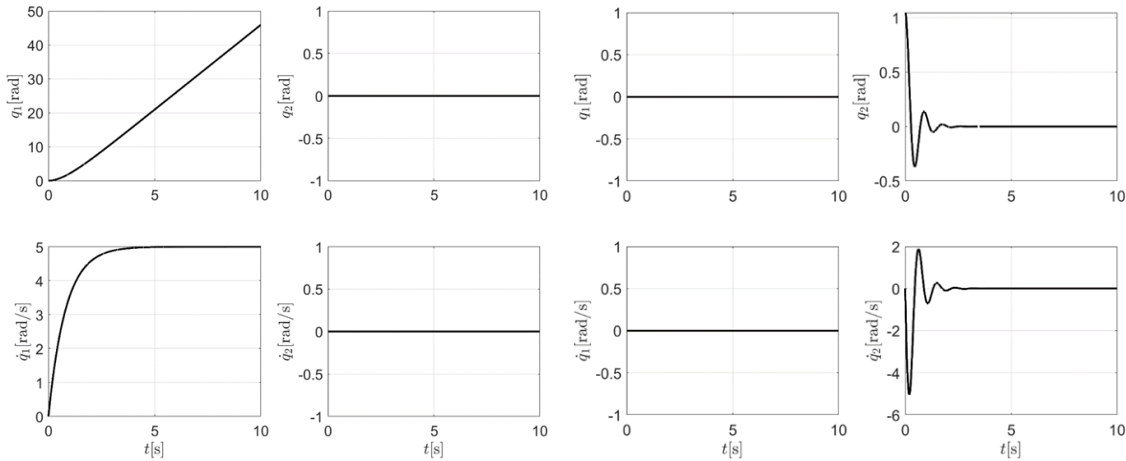
- Cuando la fuerza de fricción  $f_{v2}x_4$  es suficientemente grande como para que no se tenga movimiento del segundo eslabón. La dinámica del sistema, en este caso, corresponde a la ecuación 36.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{-f_{v1}x_2 + \tau_1}{m_1l_{c1}^2 + I_1 + m_2l_1^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Este sistema corresponde a un sistema rotacional de un grado de libertad dado por el eslabón 1, que está sometido a una fuerza  $\tau_1$  y una fuerza de fricción  $f_{v1}x_2$ . Los resultados numéricos para este caso, considerando los parámetros de la tabla 1, con  $f_{v1} = 0.01 \frac{Kg \cdot m}{s}$ , una condición inicial  $x_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ , y una entrada  $\tau_1 = 0.05 N \cdot m$ , se muestran en la figura 4a. Se observa que el sistema rotacional tiende a alcanzar una velocidad constante de  $5 \text{ rad/s}$  en estado estacionario.

Cuando la fuerza de fricción  $f_{v1}x_2$  es suficientemente grande como para que no se tenga movimiento en el primer eslabón. La dinámica del sistema estará dada por 37. Se tiene ahora como resultado un péndulo simple con fricción  $f_{v2}x_4$ .

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_4 \\ \frac{-m_2gl_{c2} \sin(x_3) - f_{v2}x_4}{I_2 + m_2l_{c2}^2} \end{bmatrix}. \quad (37)$$



a) Segundo eslabón fijo con  $\tau = 0.05 \text{ N} \cdot \text{m}$ .

b) Primer eslabón fijo y  $x_0 = [0 \ 0 \ \frac{\pi}{3} \ 0]^T$ .

Fuente: elaboración propia.

Figura 4 Comportamiento de los eslabones.

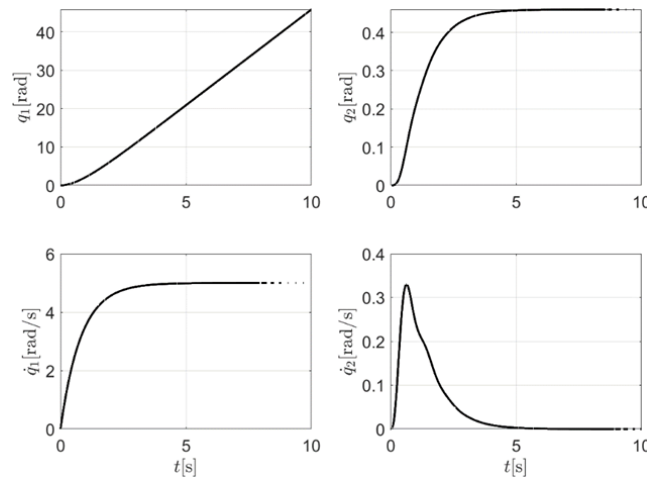
Cuando la fuerza de fricción  $f_{v1}x_2$  es suficientemente grande como para que no se tenga movimiento en el primer eslabón. La dinámica del sistema estará dada por 37. Se tiene ahora como resultado un péndulo simple con fricción  $f_{v2}x_4$ .

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_4 \\ \frac{-m_2 g l_{c2} \sin(x_3) - f_{v2} x_4}{I_2 + m_2 l_{c2}^2} \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Los resultados numéricos para este caso, considerando los parámetros de la tabla 1, con  $f_{v2} = 0.0004 \frac{\text{Kg}\cdot\text{m}}{\text{s}}$ , y una condición inicial  $x_0 = [0 \ 0 \ \frac{\pi}{3} \ 0]^T$ , y una entrada  $\tau_1 = 0 \text{ N} \cdot \text{m}$ , se muestran en la figura 4b, donde se puede observar que el eslabón 2 se comporta como un péndulo simple con fricción.

- El sistema de la ecuación 19 considerando los parámetros de la tabla 1, con  $f_{v1} = 0.01 \frac{\text{Kg}\cdot\text{m}}{\text{s}}$  y  $f_{v2} = 0.0004 \frac{\text{Kg}\cdot\text{m}}{\text{s}}$ . En este caso se tendrá el comportamiento de un péndulo axial. En la figura 5, se muestra los resultados numéricos para el comportamiento de los estados del sistema cuando se tiene condición inicial  $x_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ , y una entrada  $\tau_1 = 0.05 \text{ N} \cdot \text{m}$ . Se observa que en este caso la velocidad del primer eslabón, dado por  $x_2$  tiende

a un valor constante, aproximadamente de 5 rad/s y la posición del eslabón 2, dada por  $x_1$ , también alcanza un valor constante de 0.46 rad.



Fuente: elaboración propia.

Figura 5 Comportamiento del sistema dinámico para un torque constante  $\tau = 0.05 \text{ N} \cdot \text{m}$ .

#### 4. Discusión

La obtención del sistema dinámico del péndulo axial dado en la ecuación 35 permite realizar un análisis del sistema, y también, permite el diseño adecuado de un controlador.

Se puede observar en la ecuación 35 que la entrada de control afecta directamente el comportamiento del primer eslabón, y a partir de una entrada constante, se tendrá una velocidad constante en este eslabón.

El comportamiento del segundo eslabón se ve afectado directamente por la velocidad del primer eslabón, de ahí que, debería ser posible diseñar un control en cascada para el control de la posición del segundo eslabón a partir de una pseudoentrada definida por la velocidad del primer eslabón.

La estimación de los parámetros en la tabla 1, correspondiente a las masas y longitudes pueden ser obtenidos a través de mediciones directas de los elementos del sistema físico. Mientras que las inercias pueden ser obtenidas con cierta exactitud utilizando las herramientas de SolidWorks. Por otro lado, para estimar los coeficientes de fricción se debe considerar algún método confiable, ya que, al realizar algunas simulaciones del sistema, se observa que la variación de los

parámetros de fricción viscosa influye significativamente en el comportamiento del sistema.

El péndulo axial es un sistema no lineal subactuado, que presenta cierta dificultad para su análisis, y para el diseño y aplicación de control. Por lo que este mecanismo resulta ser una plataforma didáctica muy adecuada en sistemas de control.

## **5. Conclusiones**

Las ecuaciones resultantes del modelo dinámico permiten llevar a cabo una adecuada caracterización del movimiento del mecanismo, lo que posibilita la aplicación adecuada de diversos controladores. A su vez, la construcción de la plataforma experimental permite la implementación de nuevos tipos de controladores. Los valores de los parámetros, sin tomar en cuenta los coeficientes de fricción, se pueden obtener a través de mediciones directas y haciendo uso de las herramientas de SolidWorks. Los coeficientes de fricción deben ser obtenidos por métodos que permitan obtener un valor cercano al valor real para que la simulación represente adecuadamente el sistema físico. El mecanismo del péndulo puede ser utilizado de forma didáctica en el área de control, presentando distintos desafíos por sus características no lineales.

## **6. Bibliografía y Referencias**

- [1] Alvarado, O., Campa, R. Modelado & Ollervides, J. Modelado y control de un mecanismo tipo péndulo invertido esférico. In Congreso anual de la asociación de México de control automático 2010. México. 2010.
- [2] Antonio Cruz, M. Estudio y control de sistemas subactuados pendulares. Tesis (Doctorado en Ingeniería de Sistemas Robóticos y Mecatrónicos), Instituto Politécnico Nacional, Centro de Innovación y Desarrollo Tecnológico en Cómputo, México. 2018.
- [3] Cholodowicz, E., & Orłowski, P. Optimization of a fractional order controller for the Furuta pendulum with an output disturbance using a genetic algorithm. In 2022 17th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision (ICARCV), 373-379, 2022.



- [4] Anzures M., J, Padilla G., José & Cuevas S., Omar. Estabilidad de Sistemas No-lineales: Sistema de Nivel de Líquidos de Dos Tanques Interconectados. RIEE&C, 2008.
- [5] Bahloul, A., Tliba, S., & Chitour, Y. Dynamic parameters identification of an industrial robot with and without payload. *Ifac-Papersonline*, 51(15), 443-448. 2018.
- [6] Duarte, J., Montero, B., Ospina-Henao, P., & González, E.. Mecánica lagrangiana para el modelado dinámico y simulación mediante Simulink-Matlab de un péndulo de Furuta. In Congreso Internacional de Ciencias Básicas e Ingeniería, Villavicencio, Colombia. 2016.
- [7] Fan, L., Zhang, A., Pan, G., Du, Y., & Qiu, J. Swing-up and fixed-time stabilization control of underactuated cart-double pendulum system. *IET Control Theory & Applications*, 17(6), 662-671. 2023.
- [8] Gutiérrez Frías, Oscar Octavio. Diseño de controladores para sistemas subactuados del tipo péndulo invertido. Tesis (Doctorado en ciencias de la Computación). Ciudad de México, Instituto Politécnico Nacional, Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, Centro de Investigación en Computación. 2009.
- [9] Homburger, H., Wirtensohn, S., & Reuter, J. Swinging up and stabilization control of the Furuta pendulum using model predictive path integral control. In 2022 30th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED), 7-12, 2022.
- [10] Kelly, R., Davila, V. S., & Perez, J. A. L. Control of robot manipulators in joint space. Springer Science & Business Media, 2005.
- [11] Pazderski, D., Parulski, P., Bartkowiak, P., & Herman, P. Sub-Optimal Stabilizers of the Pendubot Using Various State Space Representations. *Energies*, 15(14), 2022.
- [12] Portillo, J. P. T. Introducción a las señales y sistemas (1st ed.). Editorial Universidad del Norte. 43-72, 2017.
- [13] Siciliano, B., Sciavicco, L., Villani, L., & Oriolo, G. Force control (pp. 363-405). Springer London. 2009.

- [14] Spong, M. W., Hutchinson, S., & Vidyasagar, M. Robot modeling and control. John Wiley & Sons. 2020.
- [15] Tang, J., & Ren, G. Modeling and simulation of a flexible inverted pendulum system. *Tsinghua Science and Technology*, 14(S2), 22-26, 2009.
- [16] Valera, A., Vallés, M., & Cardo, M. Desarrollo y Control de un Péndulo de Furuta. Dpto. Ingeniería de Sistemas y Automática. Universidad Politécnica de Valencia. Camino de Vera, 14, 46022. 2002.
- [17] Villalobos Torres, J. A., Márquez Martínez, L. A., & Cuesta, R. Modelo dinámico de un mecanismo de 5 barras con un péndulo esférico. In Congreso anual de la asociación de México de control automático. México, 2019.