

# **SIMULACIÓN DE LÍNEAS DE ESPERA CON DISTRIBUCIÓN GENERALIZADA**

## *SIMULATION OF WAITING LINES WITH GENERALIZED DISTRIBUTION*

**Anabel Aguila Fleites**

Tecnológico Nacional de México / IT de Celaya, México  
*m2203008@itcelaya.edu.mx*

**Manuel Darío Hernández Ripalda**

Tecnológico Nacional de México / IT de Celaya, México  
*dario.hernandez@itcelaya.edu.mx*

**Salvador Hernández González**

Tecnológico Nacional de México / IT de Celaya, México  
*salvador.hernandez@itcelaya.edu.mx*

**Recepción:** 23/mayo/2023

**Aceptación:** 25/enero/2024

### **Resumen**

En un sistema de colas los clientes llegan demandando un servicio a un servidor, el cual tiene una cierta capacidad de atención. En el caso de que el servicio no sea inmediato, deben esperar su turno para después ser atendidos, según una regla de prioridad, y abandonar el sistema cuando ya son atendidos. Existen muchos sistemas de colas distintos que se ajustan a modelos generales representando situaciones reales.

Este artículo se realiza con el objetivo de analizar alternativas de los modelos generales de líneas de espera para estimar medidas de desempeño cuando existe más de un servidor. Se pretende buscar criterios para calcular las medidas de desempeño en los modelos generales, basado principalmente en la simulación, y comparar con el método analítico. Así se concluye qué tan buenas y aceptadas son las aproximaciones realizadas como para emplear la simulación en la estimación de parámetros de modelos generales de múltiples servidores.

**Palabras Clave:** líneas de espera, medidas de desempeño, método analítico, modelos generales, simulación.

## **Abstract**

*In a queuing system, clients arrive requesting a service from a server, which has a certain attention capacity. If the service is not immediate, they must wait their turn to be attended to later, according to a priority rule, and leave the system when they are already attended. There are many different queuing systems that fit general models representing real situations. This article is carried out with the objective of analyzing alternatives to the general models of waiting lines to estimate performance measures when there is more than one server. It is intended to find criteria to calculate performance measures in general models, based mainly on simulation, and compare with the analytical method. Thus, it is concluded how good and accepted are the approximations made to use the simulation in the estimation of parameters of general models of multiple servers.*

**Keywords:** *waiting lines, performance measures, analytical method, general models, simulation.*

## **1. Introducción**

Los modelos de colas pueden representar con utilidad los sistemas de servicio o producción que tienen congestión por flujos irregulares, pero los análisis exactos de estos modelos de colas pueden ser difíciles. Luego entonces, es natural buscar aproximaciones simples pero que sean lo suficientemente precisas para propósitos de ingeniería.

En general los sistemas de cola o líneas de espera  $M/M/1$ ,  $M/M/k$ ,  $M/D/k$  y algunas variantes en su búfer tienen soluciones analíticas bien estudiadas, a partir de la aparición de sistemas con distribuciones generales, las fórmulas analíticas exactas para describir las probabilidades y los parámetros de servicio como tiempo en el sistema o cantidad promedio de clientes ya no existen. Lo que se ha dado son aproximaciones, métodos numéricos que aproximan también y varias formas de heurísticos. Para  $M/G/1$ , se puede emplear la fórmula Pollaczek-Khintchine [Pollaczek, 1930], [Kyritsis & Deriaz, 2019], [Khintchine, 1960] o el Método Analítico de Matriz, con complejidad de cálculo. En el caso de  $M/G/k$ , la mayoría de sus parámetros de desempeño solo pueden ser aproximados o se estiman límites de

estimación. La fórmula más antigua es la ley de congestión de Kingman [Kingman, 1962] y se considera un problema aún sin solución.

Actualmente se conocen pocos resultados para el modelo general  $G/G/k$ , ya que generaliza la cola  $M/G/k$  para la que se conocen pocas métricas. Los límites se pueden calcular usando técnicas de análisis de valor medio, adaptando los resultados del modelo de cola  $M/M/c$ , usando aproximaciones de tráfico pesado y se ha considerado también el uso de recursos basados en el aprendizaje de máquina. Cualquier modelo analítico, ya sea exacto o aproximado, es una aproximación del mundo real. La cuestión es si el modelo produce resultados con bastante precisión para poder ser utilizado como una herramienta de análisis en apoyo del diseño y toma de decisiones operativas.

La simulación de colas, según la [ACC, 2023], es un modelo matemático que ayuda a comprender las líneas de espera y la cantidad de servidores necesarios para atender a los clientes. El estudio teórico de las líneas de espera, expresado en términos matemáticos, incluye componentes como el número de filas de espera, número de servidores, tiempo medio de espera, número de colas o líneas, y probabilidades de que los tiempos de cola aumenten o disminuyan.

Este artículo se desarrolla con el objetivo de probar que la simulación permite buenas aproximaciones de cálculo de medidas de desempeño respecto al método analítico, el cual parte de la fórmula de Kingman para modelos generales con múltiples servidores. La simulación se basa en un modelo de cola de hoja de cálculo, de [Thin-Yin, 2007], que tiene, primeramente, un solo servidor bajo suposiciones simples como "servicio en orden de llegada" y "sin eventos simultáneos". Por filas se establecen todas las duraciones de tiempo y eventos para un solo cliente, estableciendo variables aleatorias que simulan la naturaleza estocástica de las colas. A esto se le denomina modelo básico, el cual se extiende para múltiples servidores agregando columnas adicionales (correspondientes a los eventos de tiempo de inicio y finalización del servicio para cada uno de ellos). El enfoque tiene ventajas en el sentido de que cada servidor puede modelarse para tener diferentes distribuciones de tiempo de servicio y se puede examinar las propiedades de rendimiento de servicio individuales.

El uso de Excel para la simulación de modelos de líneas de espera con múltiples servidores se ha vuelto cada vez más popular en los últimos años. Excel proporciona una plataforma fácil de usar y accesible para el desarrollo de modelos de simulación como se resume en la tabla 1 que conforma el Estado del arte de la investigación.

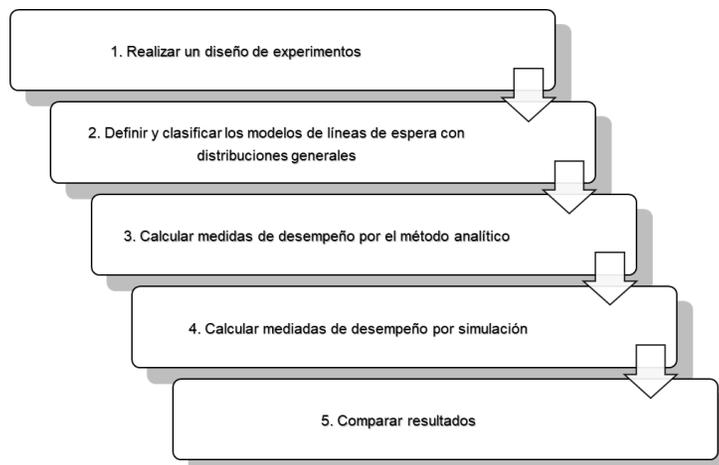
Tabla 1 Estado del arte relacionado con la simulación de líneas de espera, citas APA.

Resumen	Notas
<b>[Alejandro Pérez, Hernández González, Jiménez García, &amp; Figueroa Fernández, 2020]</b>	
Verificar mediante simulación los resultados obtenidos mediante el análisis del sistema con modelos analíticos y determinar el efecto de la variabilidad en el sistema en serie. Se realizó una simulación en el software Arena para corroborar los resultados del sistema utilizando el modelo analítico M/M/C de Teoría de Colas. A través del modelo de simulación ejecutado se evidencia una muy buena representación de la realidad. Se puede confirmar una vez más la importancia de la implementación de modelos de simulación, ya que estos permiten corroborar la veracidad de los resultados, además que permiten profundizar en el análisis del comportamiento del sistema estudiado	Comparación entre el método analítico para un modelo M/M/c y la simulación empleando el software Arena.
<b>[Cheong &amp; Chia, 2019]</b>	
Empleamos la teoría de colas para determinar la efectividad de implementar el Queue Buster. Específicamente, construimos un modelo de simulación de colas basado en parámetros de entrada derivados de los datos de colas recopilados en una tienda piloto. Se midieron tres métricas principales de rendimiento: tiempo de espera, tiempo del sistema y longitud del sistema para dos sistemas de colas diferentes, con y sin la implementación de Queue Buster. Los resultados de la simulación demostraron una mejora en las tres métricas de rendimiento cuando se implementa Queue Buster. Usando el sistema, propusimos un rango óptimo de punto de activación, es decir, el número de clientes en la cola donde las cadenas minoristas deberían comenzar a emplear Queue Buster para lograr resultados óptimos. El análisis de sensibilidad también se realizó en varios tiempos de inter-llegada para probar la robustez del modelo.	Implementa Queue Buster. Miden tiempo de espera, tiempo del sistema y longitud del sistema para dos sistemas de colas diferentes, con y sin la implementación de Queue Buster. Se realiza análisis de sensibilidad de tiempos de inter-llegadas para probar robustez.
<b>[Adesina, 2018]</b>	
En este estudio, se simuló la cola de un solo servidor utilizando la distribución Gama Inversa. Generando servidor único cola (G/G/1) se ha considerado difícil, pero este estudio presenta una formulación fácil de comprender y aplicable. Se aplicó la técnica de simulación de hoja de cálculo para estudiantes hacen cola en un restaurante en la Universidad de Lagos, Nigeria y los resultados obtenidos fueron visualizados e interpretados respectivamente	Simulación de modelo G/G/1 usando distribución de gamma inversa en hoja de cálculo Excel
<b>[Simamora, 2015]</b>	
Los modelos de cola discutidos en este estudio son la cola donde los clientes vienen en grupos que siguen un proceso de Poisson. El número de suscriptores en cada grupo es una variable aleatoria (denotada por X) y el tiempo entre llegadas es una distribución exponencial. El tiempo de servicio se realiza con una distribución exponencial, luego la cola del modelo se convierte en M/M/C. Procesamiento servido por muchos servidores (indicado por C) con disciplina de cola FIFO. Este estudio utilizó una simulación para calcular el tiempo promedio de espera del cliente en la cola, el tiempo de espera promedio de los clientes en el sistema, el número promedio de clientes en la cola, el número promedio de clientes en el sistema y la probabilidad de un servidor ocupado. El propósito de este estudio es simular múltiples colas de servidores con los patrones de llegada en grupos y puede determinar el rendimiento del sistema a través de los resultados obtenidos de la finalización de la simulación.	Simulación del modelo M/M/c, servidor múltiple y llegadas por lotes, para calcular el tiempo promedio de espera del cliente en la cola, el tiempo de espera promedio de los clientes en el sistema, el número promedio de clientes en la cola, el número promedio de clientes en el sistema y la probabilidad de un servidor ocupado.
<b>[Darmanto, Maisharoh, &amp; Pramitha, 2020]</b>	
No pocos patrones de llegada de los consumidores de un solo sistema de servicio son masivos. Si la distribución de las llegadas de los consumidores sigue una distribución distinta de una distribución exponencial, entonces tal patrón en notación Kendal se escribe como una medida del grupo que entra en el sistema. De acuerdo con estudios de campo en el sistema de colas ABC, con tiempos de servicio con enfoques de distribución gamma hiperexponencial e inversa, un modelo de cola Descriptivamente, el número de consumidores que ingresan al sistema ABC aumentó de días laborables a fines de semana, de 127 a 150 consumidores. Basado en simulaciones de Monte Carlo, la utilidad del sistema ABC con enfoques hiperexponencial y gamma inversa fue del 86% y 74% respectivamente en días laborables, así como del 87,5% y 83% los fines de semana.	Líneas de espera con llegadas masivas con tiempos de servicio con enfoques de distribución gamma hiperexponencial e inversa basada en simulación Monte Carlo

Fuente: elaboración propia.

## 2. Métodos

El método empleado en la investigación pretende dar cumplimiento a los objetivos trazados. Para ello se elabora un diagrama en el que se muestran los pasos a seguir, como se muestra en la figura 1. Hay que destacar que cada actividad proporciona una salida y alimenta a la siguiente. Posteriormente se contesta cada objetivo con las acciones planeadas para obtenerlos. El método de trabajo empleado se describe posteriormente paso a paso.



*Fuente: elaboración propia.*

Figura 1 Diagrama de actividades del método de trabajo.

El método de trabajo se basa en el cumplimiento efectivo y eficiente de los objetivos propuestos para maximizar la productividad y lograr resultados de calidad en el menor tiempo posible. Además, también ayuda a evitar errores y minimizar los riesgos, siguiendo como línea principal la disciplina, la organización y el enfoque en los objetivos. Pasos del método de trabajo propuesto:

- Realizar un diseño de experimentos: se realiza un diseño de experimentos donde se combinan parámetros de media y desviación estándar de los tiempos de arribo y servicio para evaluar el comportamiento de las medidas de desempeño. Las medias y desviaciones con determinados puntos centrales irían de parámetros bajos a altos. Se requiere probar qué tan buenas son las aproximaciones realizadas por el simulador respecto al método de fórmulas analíticas y matriciales.

- Definir y clasificar los modelos de líneas de espera con distribuciones generales: especificar la capacidad del sistema, la tasa de llegada de clientes, la distribución de los tiempos de servicio, el número de servidores, la disciplina de atención, etc. Determinar cuáles son de interés, delimitar el área de estudio en la que se pretende clasificar modelos de líneas de espera, principalmente los siguen distribuciones generales con múltiples servidores (Modelo  $G/G/k$ ).
- Calcular medidas de desempeño por el método analítico: como se está analizando modelos generales se emplea la fórmula de Kingman para determinar parámetros de interés como el tiempo medio en el sistema ( $W_s$ ), tiempo medio en la cola ( $W_q$ ), Longitud media del sistema ( $L_s$ ) y longitud media de la cola ( $L_q$ ).
- Calcular medidas de desempeño por simulación: la simulación se realiza en una hoja de cálculo Excel, fácil de entender y accesible, que simula el comportamiento de un modelo básico de un servidor y que en su forma ampliada es de múltiples servidores, donde se tienen en cuenta los tiempos de llegada y servicio y se registran otros como los tiempos de llegada de cada cliente, de inicio y fin del servicio, y el tiempo que el cliente pasa en la cola para así, determinar los tiempos de espera en la cola y en el sistema. Una vez que se han simulado varios ciclos de llegada de clientes y se han obtenido los tiempos de espera, se pueden calcular las medidas de desempeño.
- Comparar resultados: una vez que se han calculado las medidas de desempeño, se comparan los resultados del método analítico y la simulación. En caso de ser necesario, se pueden realizar ajustes al modelo de línea de espera para mejorar su desempeño.

### **3. Resultados**

Se exponen los resultados preliminares de un ejemplo  $G/G/k$  que se desarrolló como base de la investigación donde se desea elaborar un método para estimar parámetros en los modelos generales de líneas de espera utilizando la simulación. Se parte de un modelo  $G/G/k$ , donde los tiempos medios de llegadas y servicio siguen una distribución general gamma. La distribución gamma se utiliza

comúnmente para modelar cualquier variable que tenga una distribución de probabilidad sesgada y positiva, y como en este caso se analizan tiempos de llegada de clientes y tiempos de servicios, se considera que es una de las distribuciones de probabilidad continuas más apropiadas para el estudio y análisis del caso.

Se tienen como datos iniciales, o puntos centrales de referencia, un tiempo medio de arribo  $Ta = 0.25$  y tiempo medio de servicio  $Ts = 0.4$ . con la velocidad de llegada es  $\lambda = 0.75$  y la velocidad de servicio es  $\mu = 1$ . Además, una desviación estándar de llegadas  $\sigma a = 4.8$  y la de servicio es  $\sigma s = 11$ , lo cual deriva a coeficientes de variación de llegadas y servicio de  $Ca = 1$  y  $Cs = 1$ . Para facilitar la comprensión de los datos principales, estos se resumen en la tabla 2.

Tabla 2 Resumen de datos iniciales, puntos centrales de referencia del modelo G/G/k.

<b>Cantidad de servidores</b>	$k$	<b>3</b>
<b>Estimación media de tiempo de llegadas</b>	$\lambda$	4.8
<b>Estimación media de tiempo de servicio</b>	$\mu$	11
<b>Tiempo medio de llegadas</b>	$Ta$	0.208333
<b>Tiempo medio de servicio (<math>\tau</math>)</b>	$Ts$	0.090909
<b>RO</b>	$\rho$	0.14545
<b>Desviación estándar de llegadas</b>	$\sigma a$	0.208333333
<b>Desviación estándar de servicio</b>	$\sigma s$	0.090909
<b>Coefficiente de variación para llegadas</b>	$Ca$	1
<b>Coefficiente de variación para servicio</b>	$Cs$	1

*Fuente: elaboración propia.*

Con los datos iniciales se desarrolla el método propuesto paso a paso en el que se parte del diseño de experimentos:

- Realizar un diseño de experimentos. En este primer paso del método de trabajo a desarrollar se construye un diseño de experimentos como se muestra en la tabla 3. Este diseño permite combinar parámetros de media y desviación estándar de los tiempos de arribo y servicio respecto a puntos centrales establecidos como datos iniciales que irían de parámetros bajos a altos para probar qué tan buenas son las aproximaciones realizadas por el simulador respecto al método de fórmulas analíticas y matriciales.

- Definir y clasificar los modelos de líneas de espera con distribuciones generales. El modelo G/G/k es un modelo de cola de líneas múltiples en el que los clientes llegan de acuerdo con una distribución de probabilidad general (G) y son atendidos por  $k$  servidores, cada uno de los cuales sigue una distribución de probabilidad general (G). El modelo objeto de estudio en este caso es del tipo G/G/k: DG/ $\infty/\infty$  en el cual los tiempos medios de llegadas y servicio siguen una distribución general del tipo gamma, se inicia con una cantidad de 3 servidores ( $c = 3$ ) en paralelo, teniendo en cuenta que la cola sigue una disciplina general (DG), la cantidad máxima admisible en el sistema, o sea en la cola más en el servicio, es infinita y el tamaño de la fuente en cuestión también es infinita. Así se resumen las características de la cola.

Tabla 3 Modelo del diseño de experimentos.

Arribos			Servicio			Medidas de desempeño	
Media	Desv. Est.		Media	Desv. Est.		$W$	$Wq$
4.8	4.8	Original	11	11	Original		
4.8	6.0	alta	11	13	alta		
4.8	4.8	Original	11	13	alta		
4.8	6.0	alta	11	11	Original		
4.8	3.6	baja	11	9	baja		
4.8	4.8	Original	11	9	baja		
4.8	3.6	baja	11	11	Original		
6.0	4.8	baja	13	11	alta		

Fuente: Elaboración propia.

- Calcular medidas de desempeño por el método analítico. Para el cálculo de las medidas de desempeño por el método analítico, primeramente, se debe comprobar que el sistema sea estable. Para ello se utiliza la ecuación 1, denominada ecuación de equilibrio.

$$\rho = \frac{\lambda}{k \mu} \leq 1 \quad (1)$$

Se determina que el sistema es estable y por tanto se encuentra en equilibrio al calcular  $\rho = 0.14545 < 1$ . Como se está analizando modelos generales se parte la fórmula de Kingman demostrada en la ecuación 2 para determinar parámetros de interés.

$$E(Wq) \approx \left( \frac{\rho}{1-\rho} \right) \left( \frac{c_a^2 + c_s^2}{2} \right) \tau \quad (2)$$

Hay muchas generalizaciones de las aproximaciones  $G/G/1$  para dar cuenta de múltiples sistemas de servidor en la literatura. Allen y Cunneen [Allen A. O., 1978] tienen una de las primeras aproximaciones de uso común basada en la aproximación de difusión de Kingman. Su aproximación fue ajustada por Hall [Hall, 1991] para ser una simple extensión de la de Kingman para el sistema de colas  $G/G/1$  reflejada en la ecuación 3.

$$Wq(G/G/c) = \frac{C_a^2 + C_s^2}{2} Wq(M/M/c) \quad (3)$$

Se hace necesario formular y calcular los parámetros del modelo  $M/M/k$  del cual depende el modelo  $G/G/k$  en cuestión. Facilitando el trabajo se resumen los parámetros, fórmulas y valores en la tabla 4. Posteriormente se calculan las medidas de desempeño para el modelo  $G/G/k$  siguiendo la fórmula de la ecuación 3 basados en los resultados anteriores del modelo  $M/M/k$ . Cabe resaltar una vez más que se está trabajando con un total de 3 servidores ( $k = 3$ ) y con coeficientes de variación igual a 1. Los resultados se muestran en la tabla 5.

Tabla 4 Medidas de desempeño del modelo M/M/k.

Parámetros	Fórmula	Valor numérico
Número esperado de unidades en el sistema	$L_s = L_q + \lambda / \mu$	0.43815
Número esperado de unidades en la cola	$L_q = \frac{(\lambda / \mu)^n * p_0 * \rho}{s! (1 - \rho)^2}$	0.00178
Tiempo esperado en el sistema	$W_s = W_q + 1/\mu$	0.09128
Tiempo esperado en la cola	$W_q = L_q/\lambda$	0.00037

Fuente: Elaboración propia

Tabla 5 Medidas de desempeño del modelo G/G/k por el método analítico.

$L_s$	$W \lambda$	<b>0.438146</b>
$L_q$	$W_q \lambda$	<b>0.001782</b>
$W_s$	$W_q + T_s$	<b>0.091280</b>
$W_q$	$\frac{C_a^2 + C_s^2}{2} W_q(M/M/k)$	<b>0.000371</b>

Fuente: elaboración propia

Obtenidos los resultados analíticos de las medidas de desempeño de la cola  $G/G/k$ , apoyado en una plantilla de calculadora hoja Excel de la figura 2, es necesario comprobar que se cumple la Ley de Little demostrando que el número promedio a largo plazo de clientes en un sistema estacionario es igual a la tasa de llegada promedio a largo plazo multiplicada por el tiempo promedio que un cliente gasta en el sistema [Little J. D., 1961].

<b>Lambda = 4.8</b>		<b>Mu = 11</b>	<b>k = 3</b>																																																																																														
$\rho = \lambda / (s\mu)$ $p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!(1-\rho)}}$ $p_n = \frac{(\lambda/\mu)^n p_0}{n!}, \text{ si } 0 \leq n \leq s$ $p_n = \frac{(\lambda/\mu)^n p_0}{s!s^{n-s}}, \text{ si } n \geq s$ $L_q = E(N_q) = \frac{(\lambda/\mu)^s p_0 \rho}{s!(1-\rho)^2}$ $L = E(N) = L_q + \lambda/\mu$ $W_q = E(T_q) = \frac{L_q}{\lambda}$ $W = E(T) = W_q + \frac{1}{\mu}$ $CS = C_s s$ $CE = C_l L(s)$ $CT = CS + CE$		<table border="1"> <tr><th colspan="2">(M/M/k)</th></tr> <tr><td>rho</td><td>0.14545</td></tr> <tr><td>L</td><td>0.43815</td></tr> <tr><td>Lq</td><td>0.00178</td></tr> <tr><td>W</td><td>0.09128</td></tr> <tr><td>Wq</td><td>0.00037</td></tr> <tr><td>CS</td><td>9.00000</td></tr> <tr><td>CE</td><td>0.87629</td></tr> <tr><td>CT</td><td>9.87629</td></tr> <tr><td>σa</td><td>0.20833</td></tr> <tr><td>σs</td><td>0.09091</td></tr> <tr><td>E[Ta]</td><td>0.20833</td></tr> <tr><td>E[Ts]</td><td>0.09091</td></tr> <tr><td>Ca*2</td><td>1.00000</td></tr> <tr><td>Cs*2</td><td>1.00000</td></tr> <tr><th colspan="2">(G/G/s)</th></tr> <tr><td>L</td><td>0.43815</td></tr> <tr><td>Lq</td><td>0.00178</td></tr> <tr><td>W</td><td>0.09128</td></tr> <tr><td>Wq</td><td>0.00037</td></tr> <tr><th colspan="2">Ley de Little</th></tr> <tr><td>Ls=</td><td>λ*Ws</td></tr> <tr><td>0.438</td><td>0.43815</td></tr> <tr><td>Lq=</td><td>λ*Wq</td></tr> <tr><td>0.002</td><td>0.002</td></tr> </table>	(M/M/k)		rho	0.14545	L	0.43815	Lq	0.00178	W	0.09128	Wq	0.00037	CS	9.00000	CE	0.87629	CT	9.87629	σa	0.20833	σs	0.09091	E[Ta]	0.20833	E[Ts]	0.09091	Ca*2	1.00000	Cs*2	1.00000	(G/G/s)		L	0.43815	Lq	0.00178	W	0.09128	Wq	0.00037	Ley de Little		Ls=	λ*Ws	0.438	0.43815	Lq=	λ*Wq	0.002	0.002	<table border="1"> <tr><th>n</th><th>p</th></tr> <tr><td>0</td><td>p0 0.646088</td></tr> <tr><td>1</td><td>p1 0.281930</td></tr> <tr><td>2</td><td>p2 0.061512</td></tr> <tr><td>3</td><td>p3 0.008947</td></tr> <tr><td>4</td><td>p4 0.001301</td></tr> <tr><td>5</td><td>p5 0.000189</td></tr> <tr><td>6</td><td>p6 0.000028</td></tr> <tr><td>7</td><td>p7 0.000004</td></tr> <tr><td>8</td><td>p8 0.000001</td></tr> <tr><td>9</td><td>p9 0.000000</td></tr> <tr><td>10</td><td>p10 0.000000</td></tr> <tr><td>11</td><td>p11 0.000000</td></tr> <tr><td>12</td><td>p12 0.000000</td></tr> <tr><td>13</td><td>p13 0.000000</td></tr> <tr><td>14</td><td>p14 0.000000</td></tr> <tr><td>15</td><td>p15 0.000000</td></tr> <tr><td>16</td><td>p16 0.000000</td></tr> <tr><td>17</td><td>p17 0.000000</td></tr> <tr><td>18</td><td>p18 0.000000</td></tr> <tr><td>19</td><td>p19 0.000000</td></tr> <tr><td>20</td><td>p20 0.000000</td></tr> </table>	n	p	0	p0 0.646088	1	p1 0.281930	2	p2 0.061512	3	p3 0.008947	4	p4 0.001301	5	p5 0.000189	6	p6 0.000028	7	p7 0.000004	8	p8 0.000001	9	p9 0.000000	10	p10 0.000000	11	p11 0.000000	12	p12 0.000000	13	p13 0.000000	14	p14 0.000000	15	p15 0.000000	16	p16 0.000000	17	p17 0.000000	18	p18 0.000000	19	p19 0.000000	20	p20 0.000000
(M/M/k)																																																																																																	
rho	0.14545																																																																																																
L	0.43815																																																																																																
Lq	0.00178																																																																																																
W	0.09128																																																																																																
Wq	0.00037																																																																																																
CS	9.00000																																																																																																
CE	0.87629																																																																																																
CT	9.87629																																																																																																
σa	0.20833																																																																																																
σs	0.09091																																																																																																
E[Ta]	0.20833																																																																																																
E[Ts]	0.09091																																																																																																
Ca*2	1.00000																																																																																																
Cs*2	1.00000																																																																																																
(G/G/s)																																																																																																	
L	0.43815																																																																																																
Lq	0.00178																																																																																																
W	0.09128																																																																																																
Wq	0.00037																																																																																																
Ley de Little																																																																																																	
Ls=	λ*Ws																																																																																																
0.438	0.43815																																																																																																
Lq=	λ*Wq																																																																																																
0.002	0.002																																																																																																
n	p																																																																																																
0	p0 0.646088																																																																																																
1	p1 0.281930																																																																																																
2	p2 0.061512																																																																																																
3	p3 0.008947																																																																																																
4	p4 0.001301																																																																																																
5	p5 0.000189																																																																																																
6	p6 0.000028																																																																																																
7	p7 0.000004																																																																																																
8	p8 0.000001																																																																																																
9	p9 0.000000																																																																																																
10	p10 0.000000																																																																																																
11	p11 0.000000																																																																																																
12	p12 0.000000																																																																																																
13	p13 0.000000																																																																																																
14	p14 0.000000																																																																																																
15	p15 0.000000																																																																																																
16	p16 0.000000																																																																																																
17	p17 0.000000																																																																																																
18	p18 0.000000																																																																																																
19	p19 0.000000																																																																																																
20	p20 0.000000																																																																																																

Fuente: elaboración propia.

Figura 2 Método analítico en hoja de cálculo Excel.

- Calcular mediadas de desempeño por simulación. Para calcular las medidas de desempeño por simulación se utiliza una hoja de cálculo Excel basada en [Thin-Yin , 2007], que simula el comportamiento de un modelo básico de un servidor y que en su forma ampliada es de múltiples servidores, para determinar los tiempos de espera en la cola y en el sistema. Los detalles de este modelo de simulación se muestran en la figura 3.

A este estudio inicial se le modifican algunos cálculos, tales como los tiempos de arribo y servicio que se le adapta la distribución gamma inversa para que se ajuste más al escenario objeto de estudio. Los detalles de este nuevo modelo de simulación se muestran en las figuras 4 y 5.

Average Inter-Arrival Time	C4	=AVERAGE(Data!B13:K27)
Average Service Time	D4	=AVERAGE(Data!B30:K44)
Number of Servers	E4	<Input>, validated as whole numbers > 0
Opening Time	G14	<Input>, also Customer 0 "Service-End" Time
Traffic Intensity	C8	=(D4/E4)/C4*100
Utilization	D8	=SUM(D15:D999)/(E4*(G8-G14))*100
Last Customer Arrival Time	E8	=MAX(E14:E999)
Last Customer Service-End Time	G8	=MAX(G14:G999)
Average Time Customer waited	H8	=AVERAGE(H15:H999)
Ave Time Customer in System	J8	=AVERAGE(I15:I999)
Average # Customer in System	J8	=SUMPRODUCT(((J15:J998+1)+J16:J999)/2,C16:C999)/(E8-E14)
Inter-Arrival Time	C20	=PERCENTILE(Data!\$B\$13:\$K\$27,RAND())
Service Time	D20	=PERCENTILE(Data!\$B\$30:\$K\$44,RAND())
Customer Arrival Time	E20	=E19+C20
Service-Start Time	F20	=MAX(E20,IF(B20>=\$E\$4,LARGE(\$G\$14:G14,\$E\$4),0))
Service-End Time	G20	=F20+D20
Customer Wait Time	H20	=F20-E20
Customer in System Time	I20	=G20-E20
# of Customer in System	J20	=COUNTIF(\$G\$14:G19,">=8,E20)

Fuente: elaboración propia.

Figura 3 Simulación basada en [Thin-Yin , 2007] en Hoja de cálculo Excel.

	$\lambda$	$\mu$		Medidas de desempeño		
	4.8	11		Tiempo medio en la cola	Wq	0.0002072
	Tiempo medio de arribo	Tiempo medio de servicio	Cant de servidores_c	Longitud media de la cola	Lq	0.0009948
	0.2083333	0.090909	3	Tiempo medio en el sistema	Ws	0.0906679
	varianza	0.043402764		Longitud media del sistema	Ls	0.4373580
escala	beta	1	1			
forma	alfa	0.2083333	0.090909			

#arribo	inter-arribo	servicio	Tiempo de arribo	Inicio del servicio	Fin del servicio	Tiempo espera en cola	Tiempo espera en el sistema	#sistema
			0		0			
1	0.02549908	0.038371335	0.02549908	0.02549908	0.063870415	0	0.038371335	0
2	0.03174043	0.01713279	0.05723951	0.05723951	0.074372301	0	0.01713279	1
3	0.284640252	0.062311741	0.341879762	0.341879762	0.404191503	0	0.062311741	0
4	0.020288409	0.071812432	0.362168171	0.362168171	0.433980603	0	0.071812432	1
5	0.109455194	0.218938435	0.471623365	0.471623365	0.6905618	0	0.218938435	0
995	0.199964602	0.084381489	199.0449344	199.0449344	199.1293159	0	0.084381489	0
996	0.136996761	0.008000007	199.1819312	199.1819312	199.1899312	0	0.008000007	0
997	0.474357969	0.131316585	199.6562892	199.6562892	199.7876057	0	0.131316585	0
998	0.210024615	0.012965418	199.8663138	199.8663138	199.8792792	0	0.012965418	0
999	0.501938284	0.188183923	200.3682521	200.3682521	200.556436	0	0.188183923	0

Fuente: elaboración propia.

Figura 4 Simulación en Hoja de cálculo Excel del modelo G/G/k.

$\lambda$	C3	Valor numérico
$\mu$	D3	Valor numérico
Tiempo medio de arribo	C6	=1/C3
Tiempo medio de servicio	D6	=1/D3
Cant de servidores-k	E6	Valor numérico
Varianza de arribo	C7	= C6^2
Varianza de servicio	D7	= D6^2
escala (alfa) arribo	C8	= C6^2/C7
escala (alfa) servicio	D8	= D6^2/D7
forma (beta) arribo	C9	= C7/C6
forma (beta) servicio	D9	= D7/D6

a) Datos iniciales.

#arribo	B15	Valor numérico
Inter-arribo	C15	=DISTR.GAMMA.INV(ALEATORIO(),SCS9)
Servicio	D15	=DISTR.GAMMA.INV(ALEATORIO(),SDS9)
Tiempo de arribo	E15	=E14+E15
Inicio del servicio	F16	=MAX(E16,SI((B16>=\$E\$6;K.ESIMO.MAYO(\$G\$14:G15,\$E\$6);0))
Fin del servicio	G15	=F15+D15
Tiempo de espera en cola	H16	=F16-E16
Tiempo de espera en el sistema	I15	=G15-E15
#sistema	J15	=CONTAR.SI(\$G\$14:G15;">=&E16)

b) Variables.

Medidas de desempeño		
Tiempo medio en la cola (Wq)	J5	=+PROMEDIO(H15:H1013)
Longitud media de la cola (Lq)	J6	=+J5/C6
Tiempo medio en el sistema (Ws)	J7	=+PROMEDIO(I15:I1013)
Longitud media en el sistema (Ls)	J8	=+J6+D6/C6

c) Medidas de desempeño.

Fuente: elaboración propia.

Figura 5 Documentación de la simulación en Hoja de cálculo Excel.

Una vez que se han simulado varios ciclos de llegada de clientes, mediante otra hoja de cálculo MonteCarlito\_v1\_10, se pueden calcular las medidas de desempeño como se muestra en la tabla 6. Se simula un total de 1000 corridas para obtener buenos resultados del modelo y luego poder comparar con el método analítico. Estas mil corridas son procesadas mil veces más en el MonteCarlito\_v1\_10 hasta obtener los resultados deseados, con errores lo más pequeño posible, determinando resultados confiables y de poca variación, aptos para comparar con el método analítico.

Tabla 6 Medidas de desempeño del modelo G/G/k por simulación.

Medidas de desempeño G/G/k				
Tiempo medio en la cola	$Wq$	0.00037699		
Longitud media de la cola	$Lq$	0.00180957		
Tiempo medio en el sistema	$Ws$	0.09076686		
Longitud media del sistema	$Ls$	0.43817284		
	Montecarlito			
	$Wq$	$Lq$	$Ws$	$Ls$
1000	0.000376993	0.001809569	0.090766861	0.438172839
Mean	0.000375662	0.001803176	0.091343932	0.438227227
Standard error	7.51877E-06	3.60901E-05	9.16823E-05	0.000936043
Median	0.000323149	0.001551115	0.091451802	0.436436436
Standard deviation	0.000237764	0.001141269	0.002899248	0.02960027
Variance	5.65319E-08	1.3025E-06	8.40564E-06	0.000876176

Fuente: elaboración propia

### Comparación de resultados

Una vez que se han calculado las medidas de desempeño, se comparan los resultados del método analítico y la simulación. En caso de ser necesario, se pueden realizar ajustes al modelo de línea de espera para mejorar su desempeño. La tabla 7 resume la comparativa de los resultados finales del método analítico y de simulación.

Tabla 7 Comparación de resultados del método analítico y la simulación.

Medidas de desempeño G/G/k	Método Analítico	Simulación
Tiempo medio en la cola $Ls$	0.4381	0.4382
Longitud media de la cola $Lq$	0.00178	0.00180
Tiempo medio en el sistema $Ws$	0.09128	0.09134
Longitud media del sistema $Wq$	0.00037	0.00037

Fuente: Elaboración propia

Los valores de las medidas de desempeño son prácticamente iguales con diferencias insignificantes si se desea tomar decisiones al respecto. No obstante, se calcula el % de error, según la ecuación 4 , entre ambos métodos y así demostrar que el uso de la simulación para calcular medidas de desempeño de modelos generales es factible y fácil de usar y arroja resultados confiables.

$$\%error = \frac{\text{Resultado analítico} - \text{Resultado Simulación}}{\text{Resultado Simulación}} \times 100 \quad (4)$$

La tabla 8 muestra los resultados del cálculo de errores entre los métodos empleados donde se muestra que las diferencias entre los resultados son tan pequeñas que el error es aproximadamente igual a cero para todos los parámetros de interés como longitud de la cola y tiempo medio de servicio. Por lo tanto, este modelo de simulación es fiable para calcular las medidas de desempeño de modelos generales que siguen una distribución gamma en los tiempos medios de arribo y servicio.

Tabla 8 Error (%) entre métodos.

Medidas de desempeño G/G/k	Método Analítico	Simulación	% Error
Tiempo medio en la cola $L_s$	0.438	0.438	0%
Longitud media de la cola $L_q$	0.002	0.002	0%
Tiempo medio en el sistema $W_s$	0.0913	0.0913	0%
Longitud media del sistema $W_q$	0.0004	0.0004	0%

*Fuente: Elaboración propia.*

#### 4. Discusión

Para aplicar una metodología que sirva de base a la investigación, se evaluó un modelo general de líneas de espera con tres servidores utilizando el método analítico y la simulación basada en hoja de cálculo Excel. Para el método analítico se parte de la fórmula de Kingman y se calculan las medidas de desempeño para un modelo  $M/M/k$  y con ciertas modificaciones, referidas en la versión ampliada de Hall, se llegan a los parámetros del modelo general  $G/G/k$ . La simulación es mediante una hoja de cálculo Excel basada en los estudios de [Thin-Yin , 2007] la cual se modifica y ajusta a un modelo general con distribuciones gamma para los tiempos medios de arribo y servicio. Se simula una total de 1000 corridas y este

resultado se procesa en el simulador MonteCarlito\_v1\_10 para verificar valores y errores estándar y así obtener resultados con poca variación y arrojar valores aptos para comparar con el método analítico, donde las diferencias sean mínimas y se pueda tomar decisiones al respecto. Se concluye que para ambos métodos empleados los valores de las medidas de desempeño son insignificamente diferentes. Por tanto, se obtiene la longitud de cola ( $Lq$ ) es de 0.002 clientes, el tiempo esperado en la cola ( $Wq$ ) es de 0.0004 unidades de tiempo. Por otra parte, la longitud del sistema ( $Ls$ ) es de 0.438 clientes y el tiempo medio en el sistema ( $Ws$ ) es de 0.0913 unidades de tiempo. Las milésimas de diferencia que tiene el modelo de simulación respecto al analítico no son significativas si se quiere tomar decisiones respecto a ellas, por lo tanto, la simulación permite determinar estas medidas de desempeño ágilmente y con resultados favorables y confiables.

## 5. Conclusiones

Los resultados demuestran que se puede emplear la simulación en hoja de cálculo Excel como método factible para la determinación rápida y confiable de medidas de desempeño de modelos generales  $G/G/k$  que siguen distribuciones de arribo y servicio del tipo gamma. Se recomienda evaluar la simulación con otros ejemplos de modelos generales y múltiples servidores para demostrar la veracidad del método empleado. Además, se puede aplicar otras variantes de simulación como Promodel y Arena para comparar resultados.

## 6. Bibliografía y Referencias

- [1] Acc. (5 de marzo de 2023). Austin Community College. Queue Simulation: <https://www.austincc.edu/akochis/COSC2415/queue-sim.htm>.
- [2] Adesina, S. O. (2018). Modelling Queuing System with Inverse Gamma Distribution: A Spreadsheet Simulation Approach. *Anale. Seria Informatică*, 6.
- [3] Alejandro Pérez, S. N., Hernández González, S., Jiménez García, J. A., & Figueroa Fernández, V. (enero de 2020). Análisis de un sistema de servicio con teoría de colas y simulación. *Pistas Educativas*, 13.

- [4] Allen, A. O. (1978). *Probability, Statistics, and Queueing Theory: With Computer Science Applications*. New York: Academic Press.
- [5] Cheong, M. L., & Chia, Y. Q. (2019). Modelo de simulación para evaluar la efectividad de la herramienta de gestión de colas en la cadena minorista de supermercados. *International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management*, 606-610.
- [6] Darmanto, D., Maisharoh, S., & Pramitha, D. C. (2020). Penerapan sistem antrian bulk arrival single channel-single phase dengan waktu layanan pendekatan distribusi hipereksponensial dan inverse gamma. *Journal BIA Statistics*, 14(1), 1-8.
- [7] Hall, R. W. (1991). *Queueing Methods: For Services and Manufacturing*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall.
- [8] Khintchine, A. Y. (1960). *Mathematical Methods in the Theory of Queueing*. Griffin, London.
- [9] Kingman, J. (1962). On queues in heavy traffic. *J. Royal Statist. Soc. Ser. B*, 32: 102-110.
- [10] Kyritsis, A. I., & Deriaz, M. (2019). A machine learning approach. *Second International Conference on Artificial Intelligence for Industries (AI4I)*, (págs. 17-21).
- [11] Pollaczek, F. (1930). Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitstheorie. *Math. Z.*
- [12] Simamora, R. J. (2015). Simulasi Antrian Multiple Server Dengan Tipe Kedatangan Berkelompok. *Majalah Ilmiah Methoda*, 69-78.
- [13] Thin-Yin, L. (2007). Simpler Spreadsheet Simulation of Multi-Server Queues. *Informations on Education*, 7(2):172-177.