ESTABILIZACIÓN GLOBAL CLF DE SISTEMAS CON ENTRADAS DE CONTROL RESTRINGIDAS A UN CONJUNTO COMPACTO

GLOBAL CLF STABILIZATION OF SYSTEMS WITH CONTROL INPUTS CONSTRAINED TO A COMPACT SET

Horacio Leyva Castellanos
Universidad de Sonora, México
hleyva@mat.uson.mx

Recepción: 28/octubre/2021 **Aceptación:** 2/febrero/2022

Resumen

El objetivo de este documento es diseñar controles de retroalimentación continuos para la estabilización asintótica global (GAS) de sistemas afines, con control restringido a un conjunto (CVS) compacto y convexo. Se resuelve este problema de estabilización con base a un diseño de una función de retroalimentación restringida a la hipercaja y obtenida mediante la teoría CLF. Mediante una "normalización" de esta retroalimentación se obtiene el estabilizador continúo restringido al CVS.

Palabras Clave: Estabilización, función admisible, función Lyapunov.

Abstract

The objective of this document is to design continuous feedback controls for global asymptotic stabilization (GAS) of affine systems, with control restricted to a compact and convex set (CVS). This stabilization problem is solved based on a design of a feedback function restricted to the hyperbox and obtained by means of the CLF theory. By "normalizing" this feedback, the continuous stabilizer restricted to CVS is obtained.

Keywords*: Admissible function, Lyapunov function, Stabilization.*

1. Introducción

Se considera el sistema afín de tiempo continuo de entrada múltiple, ecuación 1.

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u \tag{1}$$

Donde $x \in \mathbb{R}^n$ es la variable de estado; $f, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, para $i = 1, \dots m$, son campos vectoriales de clase $C^s(\mathbb{R}^n), s \geq 0$, donde las funciones $g_i(x)$ son columnas de la matriz $G(x)$. Sin perder generalidad, se supone que $f(0) = 0$. Sea el conjunto de valores del control (CVS) $U_\Phi \subset \mathbb{R}^m$, acotado convexo y cerrado, representado por el conjunto de nivel, ecuación 2

$$U_\Phi = \{u \in \mathbb{R}^m : \Phi(\mathrm{u}) \leq 1\} \tag{2}$$

Donde $\Phi: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^+$ es una función convexa y positivamente homogénea ($\Phi(ru) = r\Phi(u)$ para cualquier real $r \geq 0$). Se supone que el conjunto $U_\Phi \subset \mathbb{R}^m$ es compacto y convexo con $0 \in int U_\Phi$.

El conjunto de funciones de control de retroalimentación admisibles está definido por la ecuación 3.

$$\mu_\Phi = \left\{u: \mathbb{R}^n \to U_\Phi : u(x) continua\right\} \tag{3}$$

Tal que para cada función Φ no negativa y positivamente homogénea, tenemos un problema de estabilización con el parámetro de entrada u restringido al conjunto de valores admisibles U_Φ . Este problema de estabilización también es llamado problema de síntesis. Diremos que una función $u(x)$ es admisible si sucede que $u(x) \in \mu_\Phi$.

El problema de estabilizar el péndulo mediante la aplicación de una fuerza finita y continua, es un ejemplo físico con un intervalo cerrado como CVS (un ejemplo de conjunto compacto y convexo) [Saperstone, 1971].

El siguiente problema abierto importante se planteó en [Sontag, 1998]: "Encontrar fórmulas universales para la estabilización CLF, para conjuntos de valores de control generales (convexos) U "; es decir, resolver el problema de síntesis con funciones de control de clase $C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$.

La teoría de funciones Lyapunov de control (CLF) se origina con el teorema de Artstein [Artstein, 1983], que establece la equivalencia entre la existencia de un estabilizador continuo y la existencia de una función de Lyapunov para el sistema de control. El objetivo principal de este artículo es abordar la estabilización asintótica global (GAS) del sistema de control afín, ecuación 1, mediante controles de retroalimentación admisibles $u(x) \in \mu_{\Phi}$.

En la literatura actual hay pocos diseños de estabilizadores continuos restringidos a un politopo. En teorema 14 del artículo [Leyva, 2013] se presenta un diseño para el caso de CVS representado por la hipercaja, elaborado vía la teoría CLF.

Dado un sistema particular del tipo: ecuación 1, con un triángulo como CVS, de manera que existe un estabilizador continuo según el teorema de Artstein, ¿cómo construir el estabilizador restringido a un triángulo?, este problema de estabilización se describe en el trabajo [Solís, 2011].

El objetivo ahora es extender el resultado presentado en [Leyva, 2013] a conjuntos CVS más generales, incluyendo el caso de politopos.

2. Métodos

El teorema de Zvi Artstein, ver [Artstein, 1983], dice lo siguiente: "Suponga que el sistema: ecuación 1, es regular y $U_{\Phi} \subset \mathbb{R}^m$ es un CVS. Existe una función de Lyapunov $V(x)$ suave si existe un control continuo (excepto posiblemente en $x = 0$) $u(x)$, restringido a tomar valores en U_{Φ}, que genera la estabilización del sistema: ecuación 1".

Dado un sistema: ecuación 1, con CVS la hipercaja H, mediante una función de Lyapunov $V(x)$, se presenta en [Leyva, 2013] un diseño de funciones de retroalimentación admisible, presentada explícitamente, con la propiedad de ser continuo, sub-óptimo y descentralizado. ¿cómo extender este diseño a otros CVS convexos?

Conviene recordar que el estudio de los conjuntos convexos ha sido dividido en la literatura en dos grandes grupos; los conjuntos convexos con frontera suave (estrictamente convexo) y los politopos. En [Rockafellar, 1972] pueden consultarse algunos conceptos de convexidad manejados en este trabajo. En general, el problema de estabilizar el sistema de ecuación 1 está fuertemente relacionado con las características particulares del CVS U, como la suavidad de su frontera ∂U. En la literatura de la teoría CLF hay estudios de estabilización de sistemas afines a ecuación 1, para CVS U acotado y estrictamente convexo, con frontera ∂U suave.

Pueden verse los trabajos [Sontag, 1989], [Malisoff, 2000], [Solís, 2010], [Solís, 2013], [Solís, 2015]. En cambio, hay pocos estudios sobre el problema de síntesis con control restringido a conjuntos con frontera no-suave (politopos), algunos son [Curtis, 2003], [Solís, 2011], [Leyva, 2013] y [Leyva, 2014].

En [Leyva, 2009] se presenta un diseño de funciones de control no negativas para el problema de estabilización de ecuación 1, que corresponde al caso $0 \in \partial U$. El caso de entrada múltiple, con U la hipercaja y $0 \in \partial U$, se estudia en el trabajo [Leyva, 2014].

En general, en el problema de estabilización de ecuación 1 con CVS convexo y compacto, siguen faltando funciones admisibles $u(x)$ presentadas explícitamente, en forma descentralizada, que incluyan características de suavidad y robustez.

Definiciones básicas y resultados previos

Tipos de CVS U_Φ

Sean funciones soporte Φ de un conjunto convexo compacto no vacío U_Φ, como los siguientes casos, ecuación 4.

$$\Phi_1(u) = L^T|u|, \;\; \Phi_2(u) = \|u\|_2 \,, \;\; \Phi_3(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{{u_i}^2}{{a_i}^2} \quad y \quad \Phi_4(u) = \max_{i=1,\dots,k}\{{v_i}^T u\}, \quad (4)$$

Donde $L^T = (l_1, l_2, \dots, l_m)$, con l_i, a_i constantes positivas, y $\{w_1, w_2, \dots, w_k\} \in \mathbb{R}^m$ representan vectores no nulos. Para cada Φ_i, suponemos que $0 \in intU_{\Phi_i}$, de forma que $\Phi_i(u) = 0$ solo si $u = 0$.

Los conjuntos U_{Φ_i} representados por la ecuación 5, son subconjuntos compactos y convexos de $\mathbb{R}^m$.

$$U_{\Phi_i} := \{u \in \mathbb{R}^m : \Phi_i(u) \leq 1\}\,, \qquad i = 1,2,3,4, \qquad (5)$$

Una clase importante de conjuntos convexos compactos es la clase de politopos convexos. Para cada politopo convexo y acotado $P \subset \mathbb{R}^m$, con $0 \in intP$, existen vectores $\{w_1, w_2, \dots, w_k\} \in \mathbb{R}^m$, de manera que por medio de la función continua y no-negativa $\Phi(u) = \max_{i=1,\dots,k}\{{w_i}^T u\}$, es posible representar el politopo P con la ecuación 6.

$$P := \{u \in \mathbb{R}^m : \Phi(u) \leq 1\}, \tag{6}$$

Que en adelante se denota P_Φ en lugar de P, dando lugar al correspondiente conjunto de funciones de retroalimentación admisibles μ_Φ. Actualmente no existen estabilizadores continuos $u(x)$ restringidos a los politopos.

¿Cómo diseñar una función de retroalimentación admisible $u(x)$ para estabilizar las soluciones del sistema de ecuación 1 en el equilibrio $x = 0$?.

Se obtiene el estabilizador admisible con base el teorema de Zvi Artstein, ver [Artstein, 1971]. Suponga que el sistema: ecuación 1, es regular y $U_\Phi \subset \mathbb{R}^m$ es un CVS. Existe una función de Lyapunov $V(x)$ suave si existe un control continuo (excepto posiblemente en $x = 0$) $u(x)$, restringido a tomar valores en U_Φ, que genera la estabilización del sistema: ecuación 1.

Dado el sistema de ecuación 1 y el CVS U_Φ, para obtener un estabilizador admisible $u(x) \in$ µ_Φ, es necesario que se cumplan dos condiciones: la condición CLF y la propiedad SCP. La condición CLF: Una función no negativa $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es llamada función Lyapunov de control (CLF), con respecto al sistema de ecuación 1 y la restricción U_Φ, si sucede que; $\min_{u \in U_\Phi} \{\nabla V(x) \bullet (f(x) + G(x)u)\} < 0$, $\forall\, x \neq 0$. Esta desigualdad significa que existe un estabilizador óptimo $\omega(x)$, que no es admisible porque es discontinua; de ser el conjunto U_Φ un politopo, la función $\omega(x)$ toma valores en los vértices del politopo, y representa el control que otorga al sistema la "mejor tasa de estabilización", de acuerdo a la derivada de la función de Lyapunov $V(x)$. Un propósito relevante aquí consiste en buscar una función continua que se aproxime a $\omega(x)$, sin perder la desigualdad anterior. La existencia de un estabilizador continuo en el origen es asegurada mediante la propiedad de control pequeño (SCP): Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se tiene la desigualdad de la ecuación 7. Para u con $\|u\|_{U_\Phi} < \varepsilon$, siempre que $0 < \|x\| < \delta$.

$$\nabla V(x) \bullet \big(f(x) + G(x)u(x)\big) < 0, \tag{7}$$

Algunos resultados de convexidad

Los siguientes resultados ($C1$, $C2$, y $C3$) de la teoría de convexidad, ver [Rockafellar, 1972], fueron considerados implícitamente en el desarrollo del trabajo.

Definición de conjunto polar. Si $A \subset \mathbb{R}^m$ es un conjunto convexo, entonces el polar de A^* es un conjunto $A^* \subset \mathbb{R}^m$ definido como: $A^* = \{b^* \in \mathbb{R}^m : b^* u \leq 1 \ \forall u \in A\}$.

Teorema $C1$. Si U es un politopo, entonces su polar U^* es un conjunto poliédrico.

Es conocido que un conjunto convexo $U \subset \mathbb{R}^m$ es un conjunto poliédrico si y sólo si éste es la intersección finita de semi-espacios cerrados (U puede ser no acotado). Por lo tanto, un politopo es un conjunto poliédrico acotado.

Si $0 \in intU$, entonces U y su polar U^* comparten las mismas propiedades, expresadas en el siguiente par de resultados:

- Corolario $C2$. U es un conjunto convexo compacto con $0 \in intU$ si y sólo si U^* es un conjunto convexo compacto con $0 \in intU^*$. Por consiguiente, $U^{**} = U$.
- Teorema $C3$. U es un politopo con $0 \in intU$ si y sólo si U^* es un politopo con $0 \in intU^*$. Por otra parte, la polaridad proporciona una biyección entre las caras de U y las caras de U^* que invierte la relación de inclusión.

Un resultado de convexidad establece que $U \subset \mathbb{R}^m$ es un politopo si y sólo si su función soporte Φ es continua y lineal por pedazos. Los dominios de linealidad corresponden a los vértices del politopo U (el máximo del producto escalar que define la función soporte se alcanza en uno de los vértices). Por lo tanto, mediante la V-representación para U con k vértices, el envolvente convexo de un conjunto de k puntos (denotado por conv{.}) es $U = conv\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, tal que su función soporte Φ_U es dada por:

$$\Phi_U(b) := \begin{cases} v_1 b & si & b \in C_1 \\ v_2 b & si & b \in C_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_k b & si & b \in C_k \end{cases}$$

Donde los conjuntos C_i son conos poliédricos con un vértice en 0, para $i = 1,2, \dots, k$, correspondiente a los dominios de la linealidad de Φ_U. Estos conos cubren $\mathbb{R}^m$, y esta cubierta es llamada el abanico del politopo U. Puede verse que $\Phi_U(b)$ es una función homogénea positiva y convexa. Por lo tanto, el conjunto polar U^* es dado por: $U^* = \{b \in \mathbb{R}^m : \Phi_U(b) \leq 1\} = \{b \in \mathbb{R}^m : v_1 b \leq 1 \ \& \dots \ \& \ v_k b \leq 1\}$ que es un conjunto definido por un sistema de k desigualdades lineales.

3. Resultados

Un diseño de una función de retroalimentación estabilizadora basada en la teoría de Lyapunov.

Dado el sistema: ecuación 1, con CSV U_Φ convexo y acotado, se presenta el diseño de una función de control $u := \mathbb{R}^n \to U_\Phi$ continua $(u(x) \in \mu)$ de modo que el punto de equilibrio $x = 0$ es GAS, bajo el sistema de ecuación 1 a lazo cerrado. Para mostrar el comportamiento asintóticamente estable, se necesita una función de Lyapunov $V(x)$ que satisfaga las condiciones de estabilización, de manera que nos proponemos diseñar una función $u(x)$ asumiendo que se conoce una función de Lyapunov $V(x)$. Un enfoque para encontrar la función de retroalimentación $u(x)$ es mediante la desigualdad de la ecuación 8.

$$\nabla V(x) \bullet \big(f(x) + G(x)u(x)\big) < 0 \quad \forall\, x \neq 0, \tag{8}$$

Para abreviar, se define la función escalar $a(x) \coloneqq \nabla V(x) \bullet f(x)$ y la función vectorial $b(x) \coloneqq \nabla V(x) \bullet G(x)$, con componentes $b_i(x) = \nabla V(x) \bullet g_i(x)\, , i = 1,2, \dots, m$.

Considere la hipercaja H como el CVS definido por la ecuación 9. Que también se puede representar como en la ecuación 10.

$$H := \left[-{r_1}^{-}, {r_1}^{+}\right] \times \dots \times \left[-{r_m}^{-}, {r_m}^{+}\right] \subset \mathbb{R}^m \, , -{r_i}^{-}, {r_i}^{+} > 0, \tag{9}$$

$$H := \left\{ u \in \mathbb{R}^m : \max_{i=1,\dots,m} \left\{ \frac{|u_i|}{r_i} \right\} \leq 1 \right\}, \tag{10}$$

Donde los parámetros $r_i, i = 1,2, \dots, m$, se definen como en la ecuación 11.

$$r_i(z) := \begin{cases} {r_i}^{+} & si \quad z \geq 0 \\ \\ {r_i}^{-} & si \quad z \leq 0 \end{cases}, \tag{11}$$

De manera que, para conjuntos compactos H y U_Φ, con $0 \in intU_{\Phi_i} \subset H \subset \mathbb{R}^m$, sucede que $\min_{u \in H} dV(x)/dt \leq \min_{u \in U_\Phi} dV(x)/dt$, y las propiedades CLF y SCP permanecen al cambiar el CVS U_Φ por H.

Se considera el diseño ε- parametrizado $(\varepsilon > 0)$ de familia de funciones de control de retroalimentación que se presenta en el teorema 14 de [Leyva, 2013], que se obtuvo mediante el teorema de Zvi Artstein con la hipercaja H como CVS. Esta función de retroalimentación $u^{\varepsilon}(x)$ es admisible, explícitamente dada, descentralizada y subóptima, definida por la ecuación 12.

$$u^{\varepsilon}(x) := \left(u_1{}^{\varepsilon}(x), \dots, u_m{}^{\varepsilon}(x)\right) \tag{12}$$

Con $u_i{}^{\varepsilon}(x) = \varrho_i{}^{\varepsilon}\big(a(x), \beta(x)\big)\overline{\omega}_i(x)$, donde $\overline{\omega}(x)$ es la mejor tasa de control de acuerdo al esquema $\min\limits_{u \in H} dV/dt$ y considerando la función no-negativa $\beta(x) = \sum |b_i| r_i$. La función de regularización $\varrho_i{}^{\varepsilon} : \mathbb{R} \times [0, \infty] \to \mathbb{R}$ es definida como en ecuación 13. Y $\tau_i{}^{\varepsilon}(x)$ es una función no positiva definida como en ecuación 14.

$$\varrho_i{}^{\varepsilon}(a, \beta) = \begin{cases} 1 - \left(1 - \dfrac{|a| + a}{2\beta} \dfrac{|b_i| r_i}{\beta}\right) exp\left(\tau_i{}^{\varepsilon} \dfrac{|b_i| r_i}{\beta}\right), & si\ |b_i| r_i > 0 \\ 0, & si\ |b_i| r_i = 0 \end{cases} \tag{13}$$

$$\tau_i{}^{\varepsilon}(x) = \begin{cases} m \dfrac{\ln\big(\lambda(x)\big)}{\lambda(x)} - \varepsilon |b_i| r_i\ , & si\ \ \beta > 0 \\ \qquad 0\ , & si\ \ \beta = 0 \end{cases} \tag{14}$$

Para $i = 1, \dots, m$, donde $\lambda(x) = 1 - \frac{1}{2}\big(|a(x)| + a(x)\big)/\beta(x)$, con parámetro de ajuste $\varepsilon > 0$. El control de ecuación 12 presentado es continuo, ya que la función regulizadora $\varrho(x)$ anula las discontinuidades de $\overline{\omega}(x)$.

Fórmula de retroalimentación con CVS $U_{\Phi} \subset H$

Considere los controles de retroalimentación continuos de forma descentralizada $u^{\varepsilon}(x) = \big(u_1(x), \dots, u_m(x)\big)^T$, dado por ecuación 12. La idea principal es extender la función de retroalimentación $u^{\varepsilon}(x)$ restringida a la hipercaja H, de manera que la función de retroalimentación $u_{\Phi}{}^{\varepsilon}(x)$, restringida al nuevo CVS $U_{\Phi} \subset H$, de forma que preserve las mismas propiedades; es decir, que representen estabilizadores descentralizados, sub-óptimos y admisibles.

Sea una función positivamente homogénea y convexa $\Phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^+$, de manera que se defina el conjunto compacto U_{Φ} como el conjunto de nivel de ecuación 15.

$$U_{\Phi} = \{u \in \mathbb{R}^m / \Phi(u) \ \leq 1\ \ ,\ \ i = 1, \dots, m\}, \tag{15}$$

¿Cómo estabilizar sistemas de tipo: ecuación 1, con funciones de retroalimentación admisibles restringidas a U_{Φ}?.

Estabilizadores admisibles restringidos a U_Φ

Una vez definido el conjunto U_Φ, se escoge una hipercaja H tal que $U_\Phi \subset H$. Sea M tal que ecuación 16.

$$M = \max_H \Phi(u) \tag{16}$$

Por lo tanto, se tiene la ecuación 17. Tal que, para el caso $1 \leq \Phi(u)$ y para cualquier función no negativa $a(x)$, se tiene la ecuación 18.

$$0 \leq \min_H \Phi(u) \leq \Phi(u) \leq \max_H \Phi(u) = M \tag{17}$$

$$\frac{a(x)}{M} \leq \frac{a(x)}{\Phi(u)} \leq a(x)\,. \tag{18}$$

Ahora considere el sistema afín de la ecuación 19.

$$\dot{x} = \frac{1}{M} f(x) + g_1(x)w_1 + \cdots + g_m(x)w_m \tag{19}$$

Con control $w = (w_1, \ldots, w_m)^T \in U_\Phi$. Considerando la función de retroalimentación admisible $u^\varepsilon(x) \in H$ dada por ecuación 12, se propone la siguiente función de retroalimentación $w : \mathbb{R}^n \to U_\Phi$, dada por la ecuación 20.

$$w^\varepsilon(x) = \begin{cases} u^\varepsilon(x) & si \quad \Phi\big(u^\varepsilon(x)\big) \leq 1 \\ \dfrac{1}{\Phi\big(u^\varepsilon(x)\big)} u^\varepsilon(x) & si \quad \Phi\big(u^\varepsilon(x)\big) \geq 1 \end{cases} \tag{20}$$

Proposición. Dado el sistema afín de ecuación 19 con las propiedades CLF y SCP en U_Φ, entonces el control $w^\varepsilon(x)$ dado por ecuación 20 es admisible y representa un estabilizador global para el sistema de ecuación 19.

Demostración

La continuidad de $w^\varepsilon(x)$ se hereda de la continuidad de $u^\varepsilon(x)$, ver proposición 12 y Teorema 14 de [Leyva, 2013]. Para el caso $\Phi\big(u^\varepsilon(x)\big) \leq 1$ es inmediato, ya que $w^\varepsilon(x) = u^\varepsilon(x)$. Para el caso $\Phi\big(u^\varepsilon(x)\big) \geq 1$, se tiene el cociente:

$$\frac{1}{\Phi\big(u^\varepsilon(x)\big)} {u_i}^\varepsilon(x), i = 1, \ldots, m$$

Es de funciones continuas, que son componentes de la función vectorial $\frac{1}{\Phi(u^{\varepsilon}(x))}u^{\varepsilon}(x)$. Se satisface que $w^{\varepsilon}(x) \in U_{\Phi}$, ya que para el caso $\Phi\left(u^{\varepsilon}(x)\right) \geq 1$ se tiene la ecuación 21. Ya que Φ es positivamente homogénea.

$$\Phi\left(\frac{1}{\Phi\left(u^{\varepsilon}(x)\right)}u^{\varepsilon}(x)\right) = \frac{1}{\Phi\left(u^{\varepsilon}(x)\right)}\Phi\left(u^{\varepsilon}(x)\right) = 1 \tag{21}$$

Ahora se prueba que el sistema de retroalimentación de ecuación 19, ecuación 20 es globalmente asintóticamente estable; con el diseño $u^{\varepsilon}(x) \in H$ dado por ecuación 12, de forma que: $a(x) + b_1 u_1(x) + \cdots + b_m u_m(x) < 0 \quad para\ toda\ \ x \neq 0$,tal que, para el caso $\Phi(u) \geq 1$, con $a(x) \geq 0$, se tienen las desigualdades de la ecuación 22. Por lo tanto, se tiene la ecuación 23.

$$\frac{1}{M}a(x) \leq \frac{1}{\Phi(u)}a(x) \leq a(x), \tag{22}$$

$$\frac{1}{M}a(x) + b_1\frac{1}{\Phi(u)}u_1(x) + \cdots + b_m\frac{1}{\Phi(u)}u_m(x) < 0 \ \ para\ toda\ x \neq 0, \tag{23}$$

Se concluye que el sistema de retroalimentación ecuación 19 - ecuación 20, es globalmente asintóticamente estable.

Ejemplo

Dado el sistema afín de la ecuación 24.

$$\dot{x_1} = \frac{2\sqrt{3}}{5}\frac{x_2}{1+{x_2}^2} + \bar{u}_1 \qquad y \qquad \dot{x}_2 = \frac{2}{5}\frac{x_1}{1+{x_1}^2} + \frac{2}{5}\frac{{x_1}^2}{1+{x_2}^2} + \bar{u}_2 \tag{24}$$

Con parámetro de control $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)^T \in P$, con el triángulo P como CVS definido como el envolvente convexo de un conjunto de tres puntos en el plano:

$$P = conv\left\{\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}\right\}$$

Por otro lado, mediante los vectores:

$$\{w_1, w_2, w_3\} = \left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{-1}{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{-\sqrt{3}}{2}\\ \frac{-1}{2}\end{pmatrix}\right\}$$

Se define la función continua y no-negativa de la ecuación 25.

$$\Phi(u) = \max_{i=1,2,3} \{w_i{}^T u\}, \tag{25}$$

Para representar el triángulo P (dado antes) como: $P := \{u \in \mathbb{R}^2 : \Phi(u) \leq 1\}$, que en adelante se denota P_Φ. Ahora el objetivo es estabilizar globalmente el sistema de ecuación 24 mediante una retroalimentación admisible $w^\varepsilon(x)$.

Observe que el sistema a lazo abierto es inestable; es decir, si $v_1 = v_2 = 0$, el origen es un equilibrio inestable bajo el sistema de ecuación 24.

Primero se estabiliza el sistema de ecuación 26.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sqrt{3}\, \frac{x_2}{1 + x_2{}^2} + u_1 \\ \dot{x}_2 &= \frac{x_1}{1 + x_1{}^2} + \frac{x_1{}^2}{1 + x_2{}^2} + u_2 \end{aligned}, \tag{26}$$

Con parámetro de control $u = (u_1, u_2)^T \in H$; con:

$$H = \left\{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \frac{1}{\sqrt{3}}|u_1| \leq 1 \;\; \& \; \frac{2}{3}\left|u_2 + \frac{1}{2}\right| \leq 1 \right\}$$

$$= conv\left\{\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-2\end{pmatrix}\right\}.$$

De forma que se tiene la ecuación 27.

$$\dot{V} = x_1\left(\sqrt{3}\, \frac{x_2}{1 + x_2{}^2} + u_1\right) + x_2\left(\frac{x_1}{1 + x_1{}^2} + \frac{x_1{}^2}{1 + x_2{}^2} + u_2\right), \tag{27}$$

Tal que, ecuación 28.

$$\min_{u \in H} \dot{V} = a(x) + b_1(x)\bar{\omega}_1 + b_2(x)\bar{\omega}_2 < 0 \; para \; x \neq 0, \tag{28}$$

Con:

$$\bar{\omega}_1(x) = \begin{cases} \sqrt{3} & si \quad x_1 \leq 0 \\ -\sqrt{3} & si \quad x_1 > 0 \end{cases} \qquad \& \quad \bar{\omega}_2(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x_2 \leq 0 \\ -2 & si \quad x_2 > 0 \end{cases}$$

Tal que a cada estado $x \neq 0$ le corresponde un valor óptimo $\bar{\omega}(x)$, de forma que se satisface la condición CLF, ecuación 29.

$$\min_{u \in U} \dot{V} = a(x) + b_1\bar{\omega}_1 + b_2\bar{\omega}_2 < 0 \; para \; x \neq 0. \tag{29}$$

La propiedad SCP: Con $\beta(x) = |b_1|r_1 + |b_2|r_2$,

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{a(x_1,x_2)}{\beta(x_1,x_2)} = \lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{x_1\left(\sqrt{3}\ \frac{x_2}{1+{x_2}^2}\right) + x_2\left(\frac{x_1}{1+{x_1}^2} + \ \frac{{x_2}^2}{1+{x_2}^2}\right)}{\sqrt{3}|x_1| + |x_2|\ r_2} = 0$$

Por lo tanto, de ecuación 12 - ecuación 14 se obtiene el siguiente estabilizador admisible, ecuación 30.

$$u^{\varepsilon}(x) = \left({u_1}^{\varepsilon}(x_1,x_2),\ {u_2}^{\varepsilon}(x_1,x_2)\right) \in H, \tag{30}$$

Tal que, ecuación 31.

$$\dot{V} = a(x) + b_1{u_1}^{\varepsilon}(x) + b_2{u_2}^{\varepsilon}(x) < 0\ \ ,\ \ para\ x \neq 0 \tag{31}$$

Sea la función no negativa de ecuación 25, $\Phi(u) = \max_{i=1,2,3}\{{w_i}^T u\}$, para definir el control $w^{\varepsilon}(x)$ como en la ecuación 32.

$$w^{\varepsilon}(x) = \begin{cases} u^{\varepsilon}(x) & si \quad \Phi\left(u^{\varepsilon}(x)\right) \leq 1 \\ \dfrac{1}{\Phi\left(u^{\varepsilon}(x)\right)} u^{\varepsilon}(x) & si \quad \Phi\left(u^{\varepsilon}(x)\right) \geq 1 \end{cases} \tag{32}$$

Tal que $w^{\varepsilon}(x)$ es admisible; ya que es continuo y está restringido al triángulo P_{Φ}, de forma que el equilibrio $x = 0$ es globalmente asintóticamente estable bajo el sistema retroalimentado, ecuaciones 24 a 32.

4. Discusión

En general, una limitación en el estudio de la estabilidad de sistemas mediante el método de Lyapunov, consiste en que no hay métodos generales para encontrar funciones de Lyapunov con las propiedades de ser definida positiva y propia, de manera que la derivada de la función (respecto a las trayectorias del sistema) sea negativa. Esto significa una debilidad en la aplicación del teorema de Z. Artstein; suponer conocida una función de Lyapunov para el sistema de control, de manera que las condiciones CLF y SCP se cumplen para un determinado sistema afín a ecuación 1, con CVS convexo y compacto.

Dado un problema particular de estabilización; un sistema afín a ecuación 1, con un CVS convexo y compacto U, los cinco pasos a seguir para obtener el estabilizador admisible $w^{\varepsilon}(x)$ son los siguientes:

- Encontrar una función de Lyapunov $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de manera que se satisfagan las propiedades SCP y CLF del teorema de Artstein.
- Determinar una función Φ no negativa y positivamente homogénea tal que $U_\Phi \coloneqq U = \{u \in \mathbb{R}^m \,:\, \Phi(u) \leq 1\}$.
- Determinar una hipercaja H, tal que $U_\Phi \subset H$.
- Obtener el estabilizador $u^\varepsilon(x) \in H$ mediante las ecuaciones 12 a 14.
- Obtener el estabilizador admisible $w^\varepsilon(x) \in U_\Phi$ mediante ecuación 20.

5. Conclusiones

Dado un problema de estabilización compuesto de un sistema afín a ecuación 1 y cualquier CVS compacto U_Φ, con $0 \in intU_\Phi \subset \mathbb{R}^m$, describimos un planteamiento que nos permite utilizar el diseño presentado en el teorema 14 de [Leyva, 2013] y resumido como algoritmo en la sección 4. Además de las condiciones establecidas en teorema 14, debe buscarse representar el conjunto CVS como un conjunto de nivel de una función no-negativa $\Phi(u)$, de forma que $U_\Phi = \{u \in \mathbb{R}^m \,:\, \Phi(u) \leq 1\}$, Una vez determinada una hipercaja H, es posible generar el estabilizador admisible $u^\varepsilon(x) \in H$ descritas en la formulas: ecuación 12 - ecuación 14, para obtener mediante ecuación 20, la función de retroalimentación $w^\varepsilon(x)$ restringido al CVS $U_\Phi \subset H$. Las propiedades de sub-optimalidad, continuidad y estructuralmente descentralizado del control $u^\varepsilon(x)$ se heredan al control $w^\varepsilon(x)$.

6. Bibliografía y Referencias

[1] Artstein, Z., Stabilization with relaxed controls. Nonlinear Analysis, Th. Meth. Appl. 7, pp. 1163-1173. 1983.

[2] Curtis, J. W., (2003). CLF-based nonlinear control with polytopic input constraints. In Proc. 42th IEEE Conf. Dec. Control, Maui, HI USA, Dec., pp. 2228-2233.

[3] Leyva, H., Solís Daun J. & Suárez R., Global CLF stabilization of systems with control inputs constrained to a hyperbox. SIAM J. Control Optim. 51, pp. 745-766. 2013.

[4] Leyva, H. & Solís Daun J., Global CLF stabilization of systems with respect to a hyperbox, allowing the null-control input in its boundary (positive controls). 53rd IEEE Conference on Decision and Control, December 15-17, Los Angeles, California, pp. 3107-3112, 2014.

[5] Leyva, H. & Solís Daun J., Synthesis of positive controls for the global CLF stabilization of systems. Proc. 48th IEEE Conf. Dec. Control/28th Chinese. Ctrl. Conf., Shanghai, China, pp. 656-660, 2009.

[6] Malisoff, M. & Sontag, E. D., Universal formulas for feedback stabilization with respect to Minkowski balls. Systems Control Lett., 40, pp. 247-260, 2000.

[7] Rockafellar, R. T., Convex Analysis, 2nd Printing, Princeton University Press, Princeton N. J., 1972.

[8] Saperstone, S. H & Yorke, J. A., (1971). Controllability of linear oscillatory systems using positive controls. SIAM J. Control. Vol. 9.

[9] Solís Daun, J., Aguirre, B., and Suárez, R., Synthesis of regular controls for the global CLF stabilization of nonlinear systems, in Proceedings of the 4th IFAC Symposium on System Structure and Control, Ancona, Italy, pp. 242-248, 2010.

[10] Solís Daun, J., and Leyva H., On the global CLF stabilization of systems with polytopic control value sets, in: Proc. 18th IFAC World Congress, August 28-Sept. 2, Milano, Italy, pp. 11042-11047, 2011.

[11] Solís Daun J., Global CLF Stabilization of Nonlinear Systems. Part I: A Geometric Approach-Compact Strictly Convex CVS SIAM J. Control Optim. 51, No. 3, 2013.

[12] Solís Daun J., Global CLF stabilization of nonlinear systems. Part II: An approximation approach-Closed CVS. SIAM J. Control Optim. 53, No. 2, pp. 645-669, 2015.

[13] Sontag E., Control-Lyapunov functions. Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory, V. Blondel, E. Sontag, M. Vidyasagar & J. Willems, eds. Springer, London, pp. 211-216. 1998.

[14] Sontag E., A "universal" construction of Artstein's theorem on nonlinear stabilization, Systems Control Lett., 13, pp. 117-123, 1989.