

DESARROLLO DE HERRAMIENTA DIDÁCTICA EN GEOGEBRA PARA EL ANÁLISIS DE LA RESPUESTA TEMPORAL DE SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

DEVELOPMENT OF A DIDACTIC TOOL IN GEOGEBRA FOR THE ANALYSIS OF THE TEMPORAL RESPONSE OF SECOND ORDER SYSTEMS

Víctor Gabriel Zamorano Vázquez

Tecnológico Nacional de México / IT de Celaya, México
17030229@itcelaya.edu.mx

Rosa Elena González Hernández

Tecnológico Nacional de México / IT de Celaya, México
17031112@itcelaya.edu.mx

Víctor Manuel Sámano Ortega

Tecnológico Nacional de México / IT de Celaya, México
victor.samano@itcelaya.edu.mx

Recepción: 2/septiembre/2020

Aceptación: 30/octubre/2020

Resumen

El análisis de sistemas de segundo orden dentro del campo de la ingeniería de control tiene una gran relevancia, ya que habitualmente la mayor parte de los sistemas pueden ser aproximados a un sistema de orden dos. Con la finalidad de contribuir al proceso de enseñanza/aprendizaje se desarrolló una herramienta didáctica mediante el software GeoGebra, la cual proporciona un análisis de sistemas de este tipo y su respuesta. La herramienta desarrollada calcula y despliega de forma gráfica la respuesta temporal del sistema ante una entrada escalón unitario, así como una serie de parámetros.

Palabras Clave: Sistemas de segundo orden, Función de transferencia, Parámetros, GeoGebra.

Abstract

The analysis of second-order systems within the field of control engineering is of great importance, since usually most systems can be approximated to an order two

system. In order to contribute to the teaching/learning process, a teaching tool was developed using the GeoGebra software, which provides an analysis of this type of system and its response. The developed tool calculates and displays graphically the temporal response of the system to a unitary step input as well as a series of parameters.

Keywords: *Second order systems, Transfer function, Parameters, GeoGebra*

1. Introducción

El trabajo presentado describe el desarrollo de una herramienta digital en GeoGebra. Este software incorpora álgebra, geometría, gráficas y más herramientas de análisis matemático. En este caso se implementó con la finalidad de reforzar el aprendizaje sobre “Sistemas de segundo orden” en materias de ciencias de la ingeniería que incluyen el tema de su contenido; tales como dinámica de sistemas, control e instrumentación. Un ejemplo de estos sistemas se puede observar en la suspensión de un automóvil, pues esta se modela como un sistema “Masa-Amortiguador-Resorte”.

El objetivo de este trabajo es generar una herramienta cognitiva, que facilite la transmisión del conocimiento hacia los alumnos, ya que al implementar estas herramientas se logran resultados positivos como un pensamiento reflexivo, reducir la carga de trabajo, etc. [1].

El uso de estas herramientas sirve al docente para integrarlas en sus planes de estudio, ya que generalmente sólo se lleva a cabo la enseñanza como algo mecanizado sin que los alumnos tengan un pensamiento reflexivo y crítico para la solución de problemas en la vida cotidiana [2].

El uso de GeoGebra se emplea en la rama de las matemáticas, está área del conocimiento, según la percepción de los alumnos, ha sido siempre la más complicada de aprender y es, sin embargo, la más aplicada y utilizada. En varios estudios se ha demostrado que el uso de GeoGebra puede aumentar poco más del 20% el rendimiento académico de los estudiantes en comparación con el método tradicional [3]. Incluso, el uso de una herramienta similar en otro estudio superó el 80% en funcionalidad y aprendizaje incluyendo comentarios positivos de la

herramienta [4]. Por otra parte, cabe destacar que el uso de estas herramientas beneficia al docente pues se desarrollan habilidades y competencias para la enseñanza [2].

La herramienta desarrollada permite al estudiante introducir los coeficientes que describen una función de transferencia de segundo orden puro mediante “Casillas de Entrada”. A partir de estas constantes, y obteniendo el valor del coeficiente de amortiguamiento representado por ε , la herramienta muestra de forma visual la respuesta temporal del sistema ante una entrada escalón unitario, así como una lista de los parámetros relevantes del sistema y una vista gráfica secundaria que representa la ubicación de los polos en el plano complejo. Todos los cálculos obtenidos se realizan en menor tiempo en comparación con realizarlos a mano.

Para medir el impacto de la herramienta didáctica se realizó una encuesta de satisfacción y opinión, obteniendo puntuaciones de entre 4.58 y 4.85, de un máximo de 5, en criterios como facilidad para usar la herramienta e interpretar sus resultados.

2. Métodos

El cálculo y despliegue de los resultados parte del análisis de una función de transferencia de segundo orden puro como se muestra en la ecuación 1.

$$G(s) = \frac{d}{as^2 + bs + c} \quad (1)$$

Este tipo de sistemas se caracteriza por tener dos polos, los cuales se representan, en el dominio del tiempo, con ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden de coeficientes constantes y condiciones iniciales de cero, donde la máxima derivada es 2. Esta función se muestra al alumno en la vista gráfica principal junto a una serie de “Casillas de entrada” donde las constantes a , b , c y d son introducidas como se muestra en la figura 1.

$$G(s) = d/(as^2 + bs + c); a \neq 0$$

a= b= c= d=

Figura 1 Casillas de entrada de la herramienta didáctica.

Para la obtención de los parámetros del sistema, esta función de transferencia se llevó a su representación canónica, dividiendo ambos términos, numerador y denominador, entre la variable a como se muestra en la ecuación 2. De esta forma se obtienen la frecuencia natural del sistema ω_n , factor de amortiguamiento ε y ganancia canónica k_c en función de valores ingresados en “Casillas de entrada”.

$$G(s) = \frac{d}{as^2 + bs + c} = \frac{\frac{d}{a}}{s^2 + \frac{b}{a}s + \frac{c}{a}} = k_c * \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\varepsilon\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2)$$

El procedimiento para obtener estas variables a partir de las constantes se muestra en las ecuaciones 3 a 5.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{c}{a}} \quad (3)$$

$$\varepsilon = \frac{b}{2a\sqrt{\frac{c}{a}}} \quad (4)$$

$$k_c = \frac{d}{c} \quad (5)$$

A partir de estas constantes y el valor obtenido para ε , se obtuvieron el resto de los parámetros y la función de salida del sistema. Dependiendo del valor de ε se obtienen diferentes casos para la respuesta del sistema. Los parámetros mostrados y su cálculo para cada uno de estos casos se muestran en tablas 1 a 4.

Tabla 1 Cálculos para el caso en que $\varepsilon > 1$.

Elemento calculado	Valor
Tipo de sistema	Sobreamortiguado
Coordenadas de los polos	$p_{1,2} = (-\varepsilon\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\varepsilon^2 - 1}, 0)$
Polos	$p_{1,2} = -\varepsilon\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$
Constantes de tiempo	$\tau_{1,2} = \frac{1}{-\varepsilon\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}$
Tiempo de asentamiento	$t_s = 4(\tau_1 + \tau_2)$
Función de la salida	$c(t) = Mk_c[1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} * e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} * e^{-\frac{t}{\tau_2}}]\mu(t)$

Tabla 2 Cálculos para el caso en que $\varepsilon = 1$.

Elemento calculado	Valor
Tipo de sistema	Críticamente amortiguado
Coordenadas de los polos	$P_{1,2} = (-\omega_n, 0)$
Polos	$p_{1,2} = -\omega_n$
Constante de tiempo	$\tau = \frac{1}{\omega_n}$
Tiempo de asentamiento	$t_s = 6\tau$
Función de la salida	$c(t) = k_c[1 - e^{-\omega_n t}(\omega_n t + 1)]\mu(t)$

Tabla 3 Cálculos para el caso en que $0 < \varepsilon < 1$.

Elemento calculado	Valor
Tipo de sistema	Subamortiguado
Coordenadas de los polos	$p_{1,2} = (-\sigma \pm \omega_d)$
Polos	$p_{1,2} = -\varepsilon\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1 - \varepsilon^2} j$
Razón de amortiguamiento	$\sigma = \varepsilon\omega_n$
Frecuencia natural amortiguada	$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \varepsilon^2}$
Tiempo de asentamiento	$t_s = \frac{4}{\sigma}$
Tiempo de subida	$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d}$
Tiempo pico	$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$
Porcentaje de sobretiro	$\%OS = e^{\frac{-\pi\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}} * 100\%$
Valor máximo de la respuesta	$c_m = k_c[1 + \frac{\%OS}{100\%}]$
Ángulo de desfase	$\theta = \cos^{-1}(\varepsilon)$
Función de la salida	$c(t) = Mk_c[1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} * \text{sen}(\omega_d t + \theta)]\mu(t)$

Tabla 4 Cálculos para el caso en que $\varepsilon \leq 0$.

Elemento calculado	Valor
Tipo de sistema	Marginalmente estable o inestable
Coordenadas de los polos	No se analiza
Parámetros del sistema y la respuesta	No se analiza
Función de la salida	No se analiza

Al tener diferentes valores para los elementos, calculados en función de la magnitud de ε , se usó para el cálculo en GeoGebra la estructura “Si (Condición, entonces, si no)”; la ecuación 6 muestra a modo de ejemplo cómo se calculó el tiempo de sentamiento bajo esta consideración.

$$\text{Si} (0 < \xi < 1,4 / \sigma, \text{Si}(\xi \geq 1,6\tau, \text{Si}(\xi > 1,4 (\tau_{-1} + \tau_{-2}), \infty))) \quad (6)$$

Para medir el impacto de la herramienta didáctica percibido por los estudiantes se realizó una encuesta de satisfacción y opinión a 26 alumnos que emplearon la herramienta en la asignatura de Dinámica de Sistemas, el método de realizar la encuesta fue por Correo, de esta manera los datos obtenidos son confiables y con más rapidez. El cuestionario aplicado a los alumnos consiste en 5 preguntas cerradas, identificadas como P1 a P5, evaluadas con una escala Likert de 5 niveles, puntuados de 1 a 5, y dos preguntas abiertas. Las preguntas del cuestionario se muestran en la tabla 5.

Tabla 5 Preguntas del cuestionario aplicado.

Preguntas cerradas		Preguntas abiertas
P1	La herramienta es fácil de usar.	¿Qué aspectos de la herramienta consideras positivos?
P2	Los resultados se muestran de forma clara.	
P3	El uso de la herramienta didáctica facilita el aprendizaje del comportamiento de los sistemas de segundo orden.	
P4	La herramienta didáctica me ayudó a resolver las tareas de la asignatura.	¿Qué mejorarías de la herramienta?
P5	Recomendaría la herramienta a compañeros que estén cursando una asignatura en donde se estudie el tema.	

3. Resultados

La aplicación analiza la respuesta de sistemas en sus diferentes casos a partir de las variables de la función que se introducen y tomando como entrada un escalón unitario. La herramienta cuenta con tres paneles como lo muestra la figura 2, la “Vista Gráfica Principal”, una “Hoja de Cálculo” y una segunda “Vista Gráfica”. En la figura 3 se observa la “Vista Gráfica Principal” en donde se muestra de forma visual la respuesta temporal del sistema, de igual manera se muestra la función $G(s)$ como guía para ingresar los valores correspondientes en las “Casillas de Entrada”, finalmente, se muestran los elementos referidos en las tablas 1 a 4 y una “Casilla

de Verificación” denominada “Propiedades” que permite ocultar o mostrar estos elementos según desee el usuario.

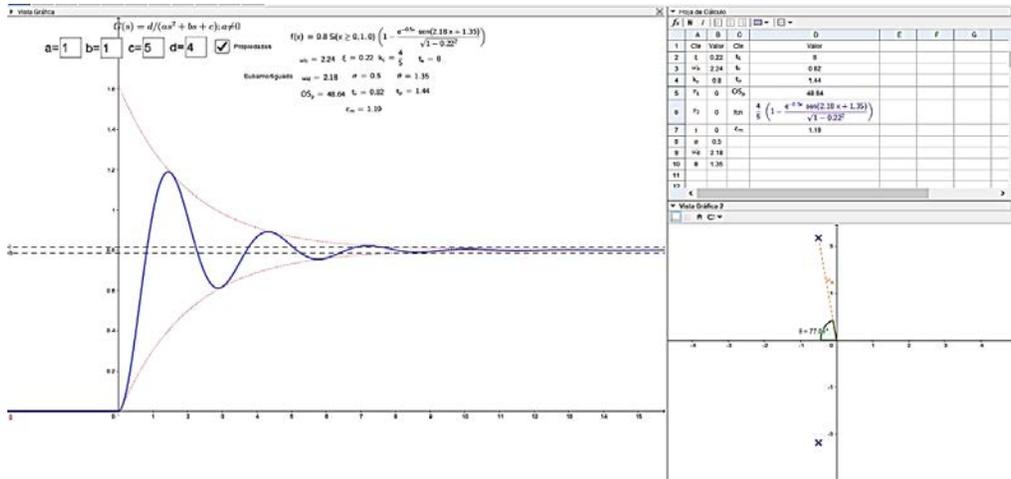


Figura 2 Interfaz de la herramienta didáctica para el usuario.

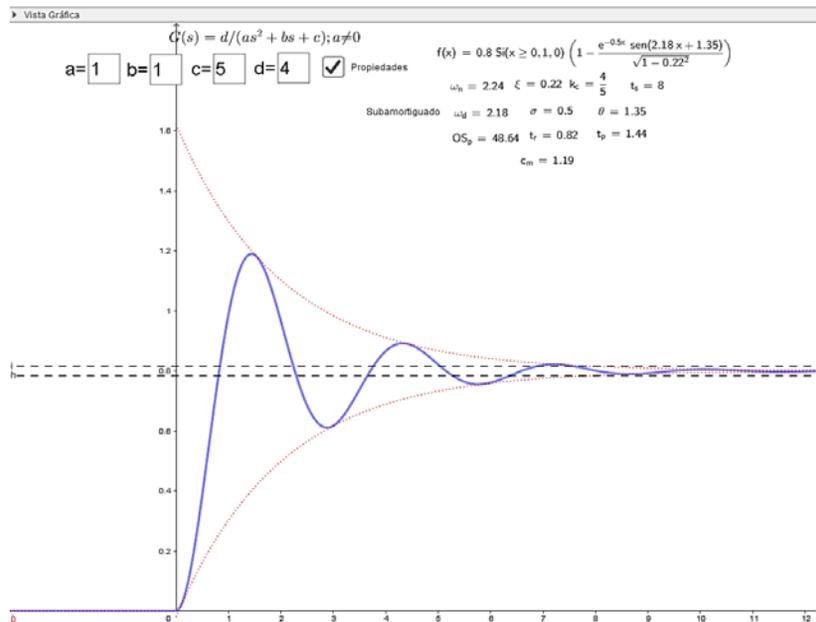


Figura 3 Vista gráfica principal de la herramienta didáctica.

En la hoja de cálculo se muestran 4 columnas (A, B, C y D) donde también se muestran los parámetros del sistema, en la columna A y C se tiene el nombre la variable y en las columnas B y D los valores correspondientes a cada uno de ellos como lo muestra la figura 4.

Hoja de Cálculo				
	A	B	C	D
1	Cte	Valor	Cte	Valor
2	ξ	0.22	t_s	8
3	ω_n	2.24	t_r	0.82
4	k_c	0.8	t_p	1.44
5	τ_1	0	OS_p	48.64
6	τ_2	0	fcn	$\frac{4}{5} \left(1 - \frac{e^{-0.5x} \text{sen}(2.18x + 1.35)}{\sqrt{1 - 0.22^2}} \right)$
7	τ	0	c_m	1.19
8	σ	0.5		
9	ω_d	2.18		
10	θ	1.35		

Figura 4 Hoja de cálculo con los parámetros del sistema.

En la figura 5 se puede ver la “Vista Gráfica 2” la cual muestra la posición de los polos en el plano complejo, y dependiendo el caso el ángulo de desfase θ .

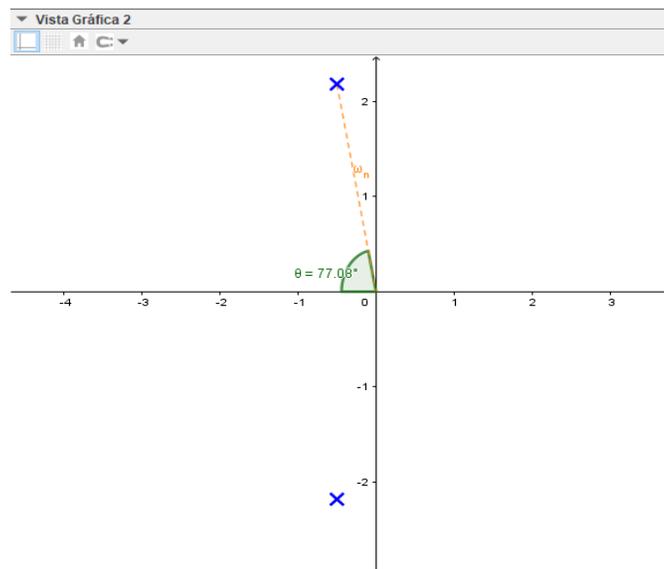
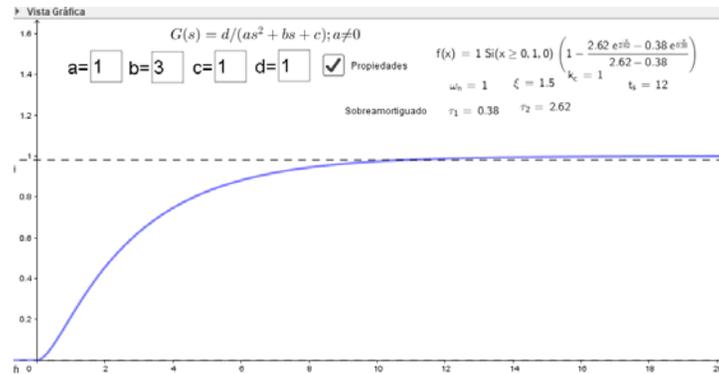


Figura 5 Vista gráfica 2 con plano complejo para los polos.

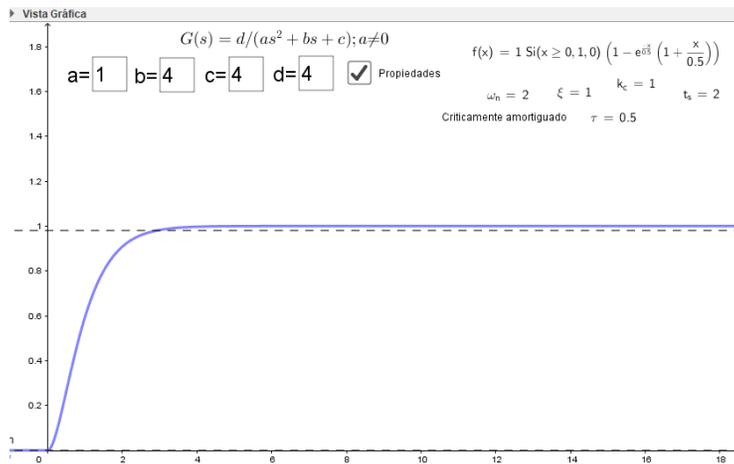
Para verificar el correcto funcionamiento de la herramienta didáctica, esta se probó con tres casos diferentes. La figura 6 muestra los resultados obtenidos para cada uno de los casos.

Finalmente, en la figura 7 se muestran las puntuaciones promedio obtenidas en la encuesta para las preguntas P1 a P5. En la parte horizontal se encuentra el número de la pregunta correspondiente, mientras que en la parte vertical se encuentra la

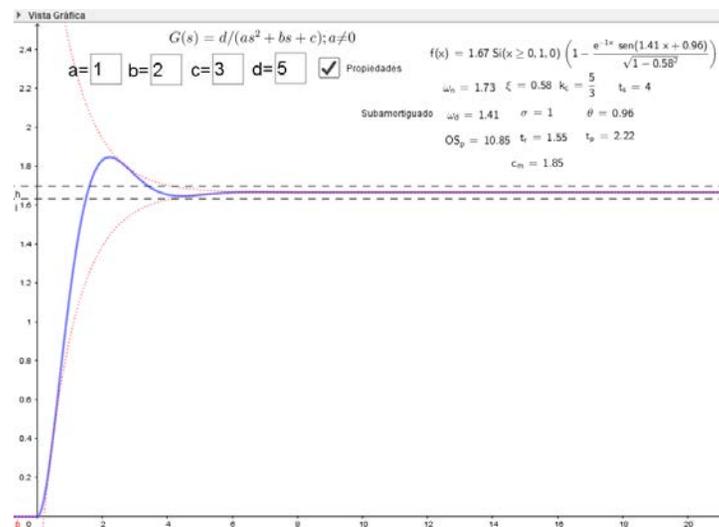
puntuación promedio para cada una de las preguntas, esta puntuación toma un valor máximo de 5.



a) Caso sobreamortiguado.



b) Caso críticamente amortiguado.



c) Caso subamortiguado.

Figura 6 Casos de sistemas de segundo orden.

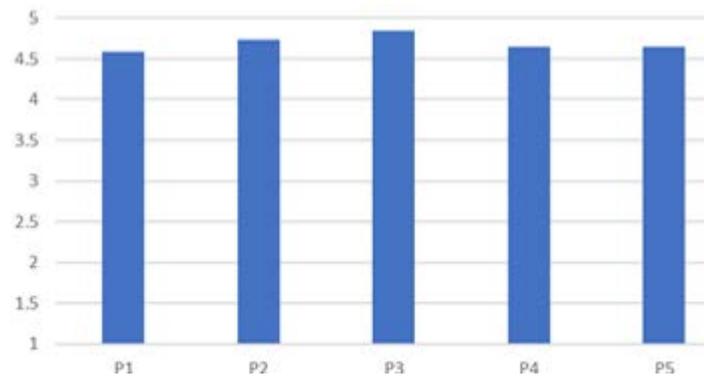


Figura 7 Puntuaciones promedio de las respuestas.

4. Discusión

La herramienta permite conocer parámetros importantes del sistema y su respuesta, arrojando esta información de manera ordenada con sólo ingresar los valores de los coeficientes de la función de transferencia. El tiempo que demora en realizar el análisis es prácticamente un instante después de ingresar los valores de las variables. Una ventaja en comparación con otros softwares comerciales es que en ellos se debe de crear un código para realizar el análisis junto con comandos que el usuario debe conocer para su correcto uso o en dado caso realizar el diagrama de bloques lo cual demora más tiempo.

5. Conclusiones

La herramienta desarrollada es capaz de calcular y desplegar los parámetros y respuesta temporal de sistemas de segundo orden pertenecientes a los tres casos analizados, sobreamortiguado, críticamente amortiguado y subamortiguado.

Los resultados de la encuesta llevada a cabo muestran un alto nivel de aceptación en los estudiantes que trabajaron con la herramienta didáctica. Entre los aspectos positivos percibidos por los alumnos destacan: la facilidad a la hora de introducir e interpretar datos, el hecho de contar con una herramienta de uso libre con un soporte bibliográfico amplio en el caso de querer hacer alguna modificación sobre la herramienta y la posibilidad de contar con una herramienta que les ayude a corroborar, interpretar y obtener resultados de ejercicios vistos en clase o planteados como trabajo en casa.

Por otra parte, la encuesta evidenció áreas de oportunidad para su mejora, como trabajo futuro y en atención a las observaciones de los alumnos, se propone integrar en la herramienta el análisis de sistemas marginalmente estables e inestables, así como sistemas de primer orden y el efecto de la adición de polos y ceros.

Desde la perspectiva de la enseñanza aún es necesario promover el uso de la herramienta entre docentes que desarrollen el tema analizado en sus materias. De este modo se podrá analizar el impacto de la herramienta en el proceso bilateral aprendizaje-enseñanza obteniendo más oportunidades de mejorarla.

6. Bibliografía y Referencias

- [1] Aparicio, O. Y., Las TIC como herramientas cognitivas. *Revista interamericana de investigación, educación y pedagogía*, vol. 11, núm. 1, pág. 97-72,75-77, 2018.
- [2] Jiménez, J. G. & Jiménez, S., Geogebra, una propuesta para innovar el proceso de enseñanza aprendizaje en matemáticas. *Revista Electrónica sobre Tecnología, Educación y Sociedad*, vol. 4, núm. 7, pág. 2-5.8-11, 2017.
- [3] Villagrán, W. J., Cruz E. L., Barahona, F. R., Barrera O. B., Insuasti, R. M., Utilización de Geogebra como herramienta analítica y su incidencia en el control del rendimiento académico de estudiantes del primer semestre de ingeniería. *Dominio de las ciencias*, vol. 4, núm. 4, pág. 129,131-133,139,142, 2018.
- [4] Salas, R. A. & Vázquez, J. J., Aplicación en la nube Luchidchart: ¿Herramienta necesaria para la innovación del proceso educativo en el siglo XXI? *Revista de Comunicación de la SEECI*, núm. 44, pág. 115,117-123, 2018.