PROPUESTA DE UNA ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE UTILIZANDO UN SOFTWARE COMO HERRAMIENTA COGNITIVA

Agustín Alfredo Torres Rodríguez
Instituto Tecnológico de Atitalaquia
angust68@yahoo.com.mx

Marcos Campos Nava
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
mcampos@uaeh.edu.mx

Resumen

Un tipo común de ecuaciones diferenciales lo constituyen las ecuaciones lineales homogéneas. En el estudio de tales ecuaciones se revisa un concepto denominado dependencia/independencia lineal, que resulta de utilidad para saber si una función dada es una solución de la ecuación diferencial, o bien si un conjunto de “n” soluciones linealmente independientes constituyen de hecho su conjunto fundamental de soluciones. Es fácil entender este concepto en el caso de un par de funciones, ya que por ejemplo si ambas son linealmente dependientes en un intervalo, significa que existe una combinación lineal de ellas equivalente al cero. Sin embargo, a partir de tres funciones, este tipo de análisis se complica y no resulta tan evidente al estudiante hallar una combinación de las mismas que le permita concluir si el sistema de funciones es o no linealmente independiente. La propuesta de este trabajo se basa en el empleo de un software como herramienta cognitiva en la enseñanza de las matemáticas, y se centra en el diseño de una actividad de aprendizaje con el uso de un software que le permita al estudiante hallar la solución de una forma más fácil, enriqueciendo los significados involucrados en dicho concepto, contribuyendo con ello a una mayor comprensión. En una primera etapa del proceso se implementó una prueba piloto que nos proporcionó indicios acerca de la forma de abordar el problema por parte de un grupo de estudiantes de licenciatura de cuarto semestre, coadyuvando a definir los elementos que debe contener la actividad de aprendizaje.

Palabras clave: Independencia lineal, actividad de aprendizaje, Geogebra.

Abstract

A common type of differential equations is constituted by the homogeneous linear equations. In the study of such equations a concept called linear dependency/independence, which is useful to know whether a given function is a solution of the differential equation, or if a set of "n" linearly independent solutions are actually its fundamental set of solutions. Is easy to understand this concept in the case of a pair of functions, as for example if both are linearly dependent on the range, it means that there is a linear combination of them equal to zero. However, from three functions, this type of analysis is complicated and not so obvious to the student to find a combination thereof that allows the system to conclude whether or not functions is linearly independent. The proposal of this work is based on the use of software as a cognitive tool in the teaching of mathematics, and focuses on the design of a learning activity using software that allows the student to find the solution of an easier way, enriching the meanings involved in this concept, thereby contributing to greater understanding. In a first stage of this process a pilot which provided evidence about how to address the problem by a group of undergraduate students of fourth semester, helping to define the elements that must contain the learning activity.

Keywords: *linear independence, learning activity, Geogebra.*

1. Introducción

Los conceptos de independencia/dependencia lineal

En álgebra lineal se utiliza con frecuencia el término combinación lineal para denotar que un elemento de un espacio vectorial, por ejemplo un vector puede ser expresado utilizando las operaciones básicas definidas para los demás elementos de ese espacio vectorial, es decir la suma de vectores y la multiplicación de vectores por escalares, formalmente se puede dar la siguiente definición:

Sea $\vec{z}$ un elemento de un espacio vectorial E. Se dice que $\vec{z}$ es una combinación lineal de los elementos $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n} \in E$, si existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots. \alpha_n$ escalares en $\mathbb{R}$ tales que: $\vec{z} = \alpha_1\overrightarrow{x_1} + \alpha_2\overrightarrow{x_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{x_n}$ (Hitt, F. 2002).

De lo anterior se pueden seguir definiendo otros conceptos de importancia en el álgebra lineal hasta llegar al de independencia lineal; que en términos de vectores en dos o tres dimensiones, se puede tratar de interpretar geométricamente como aquellos vectores que no son paralelos o que no están contenidos todos en un mismo plano respectivamente, formalmente se tiene:

Se dice que los vectores $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n} \in E$ son linealmente independientes si la única solución de la ecuación: $\alpha_1\overrightarrow{x_1} + \alpha_2\overrightarrow{x_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{x_n} = 0$ es $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$

En caso contrario se dicen linealmente dependientes. (Hitt, F. 2002).

La anterior definición lleva a concluir que para decidir la dependencia o independencia lineal de un conjunto de vectores, se puede formar un determinante de la siguiente manera:

Si $\overrightarrow{x_1} = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1})$; $\overrightarrow{x_2} = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2})$; … ; $\overrightarrow{x_n} = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{nn})$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Si el valor del determinante es cero, se concluye que los vectores son linealmente dependientes, de lo contrario se concluye que son linealmente independientes.

En el caso de los cursos de ecuaciones diferenciales, se suele hablar también de combinación lineal y de independencia lineal, solo que el objeto de estudio dejan de ser vectores de $\mathbb{R}^2$o $\mathbb{R}^3$, y en su lugar son funciones de una variable real, sin embargo la analogía de las definiciones dadas para vectores pueden resultar útiles. En este sentido, para poder encontrar la solución de cierta clase de ecuaciones diferenciales, es conveniente a veces decidir si un conjunto de funciones son linealmente independientes o no. Así por ejemplo tenemos el caso que para determinar la independencia lineal entre dos funciones se puede emplear un análisis algebraico relativamente sencillo, en el siguiente ejemplo se puede corroborar fácilmente que los coeficientes son iguales a cero y en tal caso:

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0 \quad \text{Se cumple sólo cuando } c_1 = c_2 = 0$$

Lo anterior nos lleva a concluir que las funciones son linealmente independientes. En otros casos, resulta que se puede conformar un sistema de ecuaciones con los coeficientes, y un resultado común de este análisis es que las funciones son dependientes linealmente (Fogiel, 2004). En otras situaciones comunes podemos apoyar nuestro análisis construyendo el gráfico del par de funciones y de este modo facilitar el análisis para hallar los valores de los coeficientes que nos proporcionen el resultado de la o las posibles soluciones de combinación lineal. También desde luego que se puede abordar el problema de independencia o dependencia lineal calculando el *wronskiano* de las funciones involucradas, algo muy parecido a lo que comentábamos en párrafos anteriores cuando hablábamos de vectores (el determinante de los vectores). En este último caso, sin embargo, el problema puede complicarse para el estudiante cuando intentamos calcular el wronskiano de más de tres funciones.

La relevancia de las actividades de aprendizaje y el empleo de las TICS

Varios autores han valorado la importancia de implementar en el aula actividades o tareas de aprendizaje para promover una mejor comprensión de conceptos o ideas matemáticas. Una actividad de aprendizaje, debe además contener ciertos elementos a saber: un objetivo definido, contenidos matemáticos estructurados en base a dicho objetivo, un escenario propicio y un proceso inquisitivo (Stein & Smith 1998; Barrera & Reyes, 2013), de manera tal que permita al estudiante ejercitar procesos tales como describir, explicar, comparar, justificar, formular preguntas, elaborar conclusiones y de ser posible trabajar con diferentes registros de representación. Si nos referimos ahora al elemento que denominamos escenario propicio, diversos estudios nos llevan a considerar que el empleo de las herramientas tecnológicas permite proveer de un escenario más idóneo para desarrollar los procesos de comprensión de ideas y conceptos (Santos, 2010). Más allá de las consideraciones anteriores, otros autores han propuesto que la utilización pertinente de las herramientas tecnológicas en la enseñanza de las matemáticas, las convierte en instrumentos de mediación (Pea, 1985) que definitivamente tienen influencia mayor en la amplificación y reorganización de los conocimientos.

Por todo esto se considera hoy en día que una de las actividades imprescindibles de los docentes es involucrarnos en el diseño de este tipo de tareas o actividades para poder implementarlas en el aula, buscando siempre poder contribuir a mejorar la calidad del aprendizaje que alcanzan nuestros estudiantes.

Antecedentes

Se han elaborado propuestas didácticas para abordar algunos aspectos alrededor de los conceptos de dependencia e independencia lineal, como ejemplo tenemos los trabajos de Oropeza y Lezama (2007), y los de Arzamendi (2009). Es oportuno anotar que estos estudios se han realizado desde la perspectiva del álgebra lineal y el cálculo vectorial. En el primer caso, los autores estuvieron interesados en diseñar una serie de actividades para poder representar gráficamente las ideas en torno a los conceptos de dependencia o independencia lineal y con ello coadyuvar en la comprensión de tales conceptos. Particularmente se apoyaron en la representación de combinaciones lineales de vectores, utilizando los conocimientos previos de operaciones básicas entre vectores y escalares. En una segunda parte introdujeron en forma más general el concepto de dependencia/independencia para funciones a través de la estimación del wronskiano, y reforzaron la actividad con la ayuda de los gráficos de las funciones implicadas. Cabe resaltar que las actividades se presentaron a los estudiantes en un escenario de lápiz y papel, sin emplear herramientas tecnológicas, intentando explorar las ideas de los estudiantes con respecto a la ayuda que puede representar el gráfico para apoyar la comprensión del concepto de dependencia/independencia lineal. Arzamendi (2009) por su parte se centró en el estudio del efecto de la representación geométrica en la comprensión del concepto de dependencia lineal en funciones. En una primera parte de la actividad planteó ejercicios para que el estudiante comprobara por sí mismo diferentes combinaciones lineales para un par de funciones, una lineal y una cuadrática, en particular esta actividad tuvo la finalidad de verificar visualmente el efecto que tiene multiplicar la función por un escalar y de esta manera analizar la forma en que afecta el comportamiento gráfico de dichas funciones. Posteriormente la segunda actividad consistió en establecer si era posible que las funciones seno y coseno fueran linealmente dependientes, y para ello se iba variando el valor del coeficiente de la senoidal, en analogía al producto de un vector por un escalar. Se pudo corroborar que ambas son linealmente independientes. Igualmente trabajaron con otros conjuntos de funciones.

En nuestro caso el interés se centró más bien en la búsqueda de una combinación lineal que cumpliera un requisito a saber: la nulidad de la combinación, esto es, que al poder dilucidar si se trata de un caso de dependencia o independencia lineal, el alumno estuviera entonces en posibilidad de argumentar acerca de la naturaleza de la o las funciones como posibles soluciones de una ED de tipo homogénea.

2. Métodos

Consideraciones preliminares a la actividad de aprendizaje

Supongamos, por ejemplo que nos interesa discutir si la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, homogénea $y'' + ay' + by = 0$ (con *a* y *b* constantes) tiene como solución funciones $y = f(x)$ que la satisfagan. Por la experiencia que los estudiantes deben tener en sus cursos de cálculo, no debiera resultarles difícil, por simple inspección suponer que una función que pudiera satisfacer a la ecuación diferencial es $y = e^x$ o al menos un tipo de función exponencial, dado que deseamos que la segunda derivada de la función (y''), mas un múltiplo de la primera derivada de la función (ay'), mas otro múltiplo de la función misma (by), se anulen. En este sentido, se podría pensar que buscamos funciones que al derivarse una y dos veces no cambien mucho respecto a la función original, para que se aspire a que su suma se anule; por lo cual se puede sospechar también de funciones del tipo $y = sen(x)$; $y = \cos(x)$; $y = xe^x$ como posibles soluciones. Supongamos que encontramos dos funciones y_1, y_2 que satisfacen la ecuación diferencial en cuestión, una pregunta natural es ¿tenemos dos soluciones diferentes? Otra pregunta que surge es ¿si las soluciones son diferentes podemos formar con estas una solución general? Y de forma más extensa, preguntarse si una ecuación diferencial puede tener solución y en caso de tenerla si es única o existen muchas funciones que puedan satisfacerla ¿se puede formar una combinación lineal con las soluciones encontradas y garantizar que sigue siendo solución? Se puede comprobar que si y_1 , y_2 son soluciones de la ecuación diferencial, entonces su combinación lineal $C_1y_1 + C_2y_2$ es también solución, y se puede considerar como solución general si y_1, y_2 son funciones linealmente independientes, en este sentido ¿se puede utilizar un criterio similar al utilizado en álgebra lineal para determinar la independencia lineal?

Sean y_1 , y_2 dos soluciones de

$$y'' + ay' + by = 0.$$

El wronskiano de y_1 , y_2 es la función definida para todo real "*x*" por

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$$

De esta definición se deduce que el wronskiano puede escribirse como el determinante 2x2:
$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

Si tanto y_1 como y_2 son soluciones de la ecuación diferencial $y'' + ay' + by = 0$ entonces su wronskiano "W" es idénticamente nulo o nunca toma el valor de cero. En decir, el criterio para decidir sobre la independencia o dependencia lineal de un conjunto de funciones, sigue siendo por medio de la solución de un determinante. Formalmente tenemos: Se dice que un conjunto de funciones $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ es linealmente dependiente en un intervalo J, si existen constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ no todas cero, tales que $C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x) = 0$ Para toda "x" en el intervalo. Si el conjunto de funciones no es linealmente dependiente en el intervalo, se dice que es linealmente independiente (Salas, Hille & Etgen; 2008). ¿Qué sucedería en el caso de tener una ecuación diferencial que es satisfecha por más de dos funciones? ¿Cómo verificar la dependencia o independencia lineal de las mismas? Veamos el siguiente ejemplo:

Para el siguiente conjunto de funciones que son soluciones de la ecuación

$$y''' - y'' + y' - 1 = 0$$

Indicar si son linealmente independientes utilizando el wronskiano.

$y_1(x) = 1 \quad y_2(x) = \cos(x) \quad y_3(x) = sen(x)$ (Salas, Hille & Etgen; 2008).

En este caso se tendría que desarrollar el siguiente determinante, para verificar si su valor es cero o diferente de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(x) & sen(x) \\ 0 & -sen(x) & \cos(x) \\ 0 & -\cos(x) & -sen(x) \end{vmatrix}$$

Como se puede observar, el resolver el wronskiano puede resultar una tarea difícil, dependiendo del tipo y número de funciones. En este sentido, nos preguntamos si se puede diseñar una actividad en la que los estudiantes de cursos de ecuaciones diferenciales puedan entender el concepto de independencia lineal entre funciones y logren determinar la dependencia o independencia de un conjunto de funciones, sin necesidad de resolver su wronskiano.

La Actividad preliminar propuesta

Para tratar de entender si el uso de herramientas digitales, en particular del software de geometría dinámica Geogebra puede ser una herramienta cognitiva que permita a los estudiantes entender el concepto de independencia lineal de un conjunto de funciones, en particular cuando son más de dos, se propuso la siguiente actividad a un grupo de estudiantes de ingeniería de cuarto semestre de una universidad pública que cursaban ecuaciones diferenciales y tenían como antecedente un curso previo de cálculo vectorial durante el cual habían utilizado sistemáticamente Geogebra en sus sesiones. En las clases anteriores a la implementación de esta actividad, se habían abordado las definiciones formales de dependencia o independencia lineal, y se habían discutido situaciones planteadas por algunos ejercicios (parte de lo que se refiere en la introducción).

Enunciado de la actividad: Discuta si los siguientes conjuntos de funciones son linealmente independientes o no, utilizando como recurso Geogebra.

a) $y_1(x) = \sqrt{x} - a$; $y_2(x) = \sqrt{x} - x$; $y_3(x) = ax^2$; $y_4(x) = x - a$

b) $y_1(x) = sen^2(x)$; $y_2(x) = cos^2(x)$; $y_3(x) = tan^2(x)$; $y_4(x) = sec^2(x)$

Para la solución de la actividad, se permitió a los estudiantes trabajar en equipos de dos o tres personas sin la intervención del profesor y sin auxiliarles en el uso del software; en este sentido se consideró que los antecedentes con que contaban eran suficientes. La idea de implementarla de esta forma, fue colectar datos que nos proporcionaran indicios acerca de cómo abordaban esta tarea con el uso del software; y dado que también se les solicitó discutir y argumentar sus resultados, queríamos dar constancia de cómo influyó el empleo de las herramientas tecnológicas en el proceso de solución en general, así como en la comprensión de las ideas y/o conceptos involucrados.

3. Resultados

Hallazgos de la prueba preliminar

Se pudo observar que los cuatro equipos hicieron uso de la herramienta deslizador para poder variar dinámicamente los valores de las constantes, algunos hicieron uso del comando animación para observar en forma más ilustrativa el comportamiento de la combinación lineal de las cuatro funciones; en el caso de las funciones del inciso “a” la mayoría tuvo dificultades para dar conclusiones satisfactorias; sin embargo en el inciso “b” varios equipos lograron determinar el intervalo en que la combinación lineal de las funciones se anula:

- El grupo 1 concluye para el inciso a), que no existen constantes que les permitan una combinación con las 4 funciones para que se anulen, a menos que las cuatro constantes valgan cero y concluyen que las funciones son linealmente dependientes, figura 1.

- El grupo 2 encontró valores para la combinación lineal del inciso a), cuyo comportamiento es de una función constante, pero particularmente para el valor 4, sin embargo ellos deciden entonces que las funciones son linealmente dependientes en el intervalo (0,∞), figura 2.

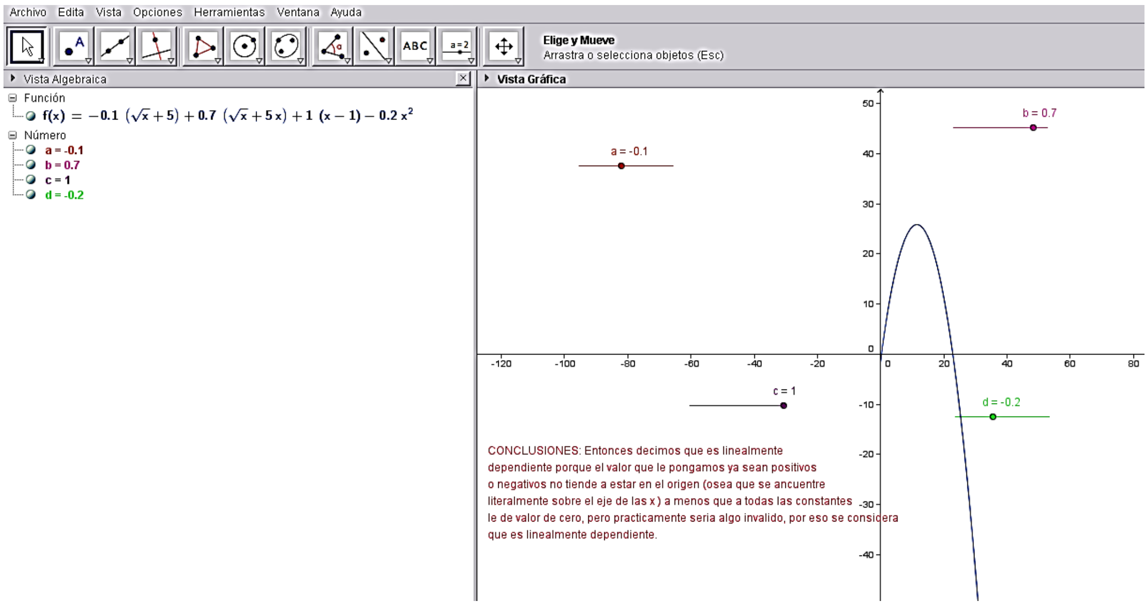


Figura 1 Conclusión grupo1, inciso a).

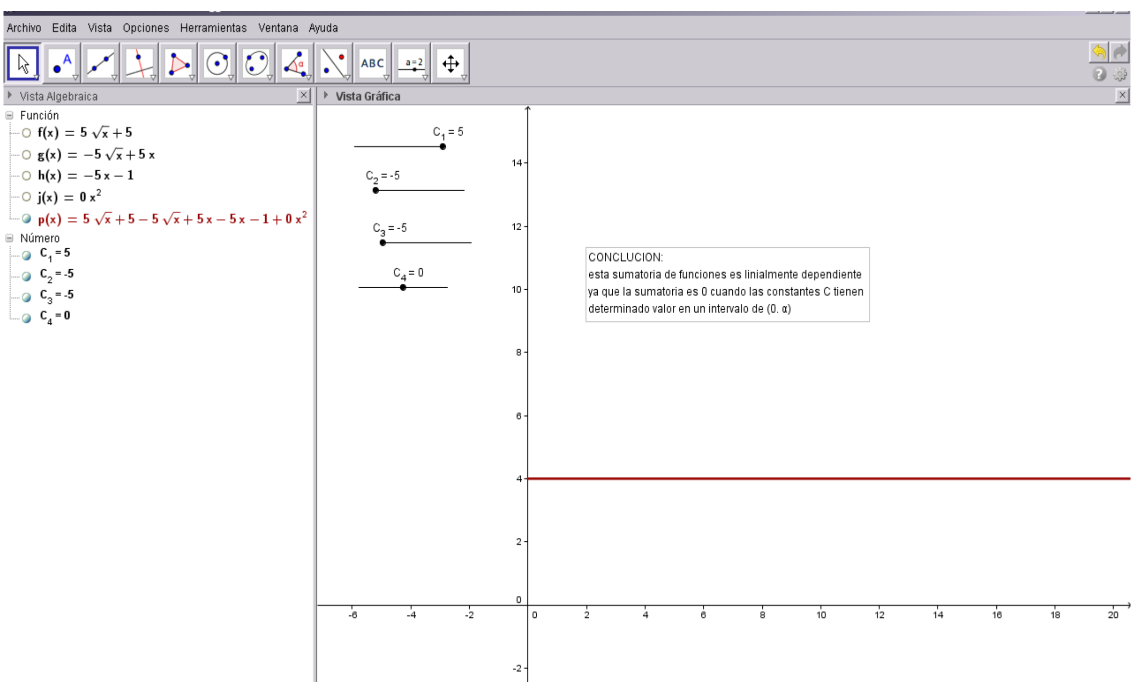


Figura 2 Conclusión grupo 2, inciso a).

- Para el conjunto de funciones trigonométricas (inciso b)), el grupo 3 encontró valores de las constantes (distintos de cero) para los cuales la combinación lineal se anula.

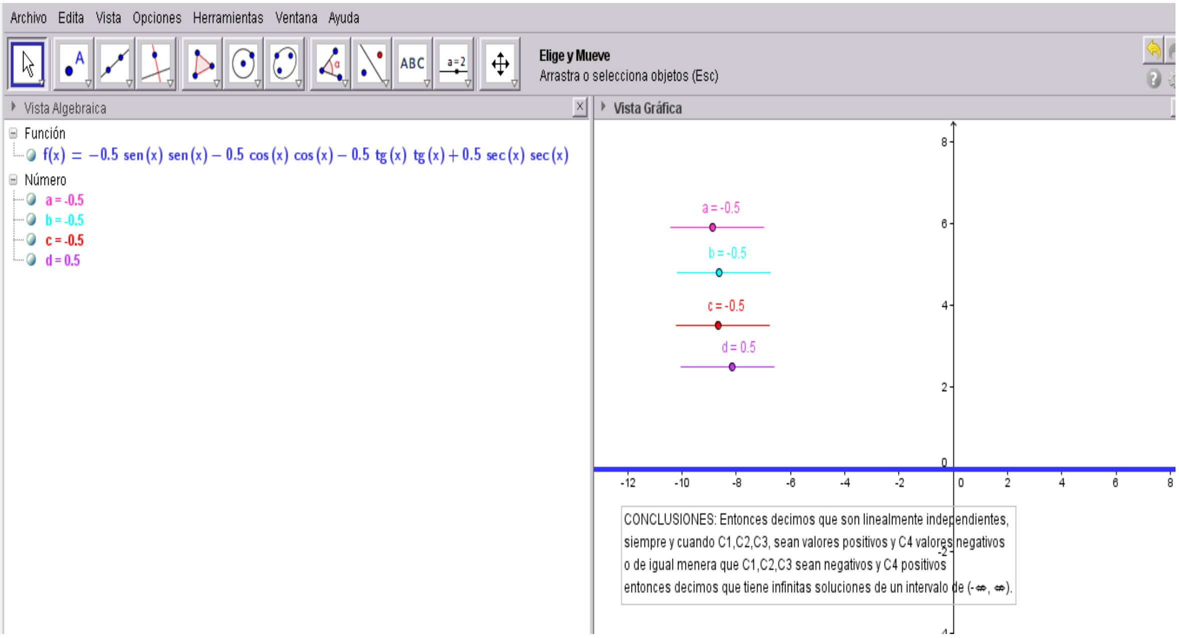


Figura 3 Conclusiones grupo 3, inciso b).

- El cuarto equipo, graficó la función f(x)=2 $\sqrt{x}$ – 2a +ax^2 (figura 4), que es una combinación lineal de las cuatro funciones del primer inciso, y además con ayuda del software determinaron según su parecer, que son linealmente dependientes en el intervalo [0,∞), dado que hallaron cuatro coeficientes distintos tales que la función combinación equivalía a un valor constante (4 en este caso). Sin embargo estos estudiantes se equivocaron en dicha conclusión, ya que el valor de la combinación debería ser cero en el intervalo mencionado para poder cumplir con la definición de dependencia lineal. En el caso del conjunto de funciones sen^{2}x, cos^{2}x, tan^{2}x y sec^{2}x, se resolvió en forma más satisfactoria, y dos equipos lograron determinar, utilizando el software, los cuatro coeficientes que permiten que el conjunto de funciones sean linealmente dependientes en el intervalo [0,∞).

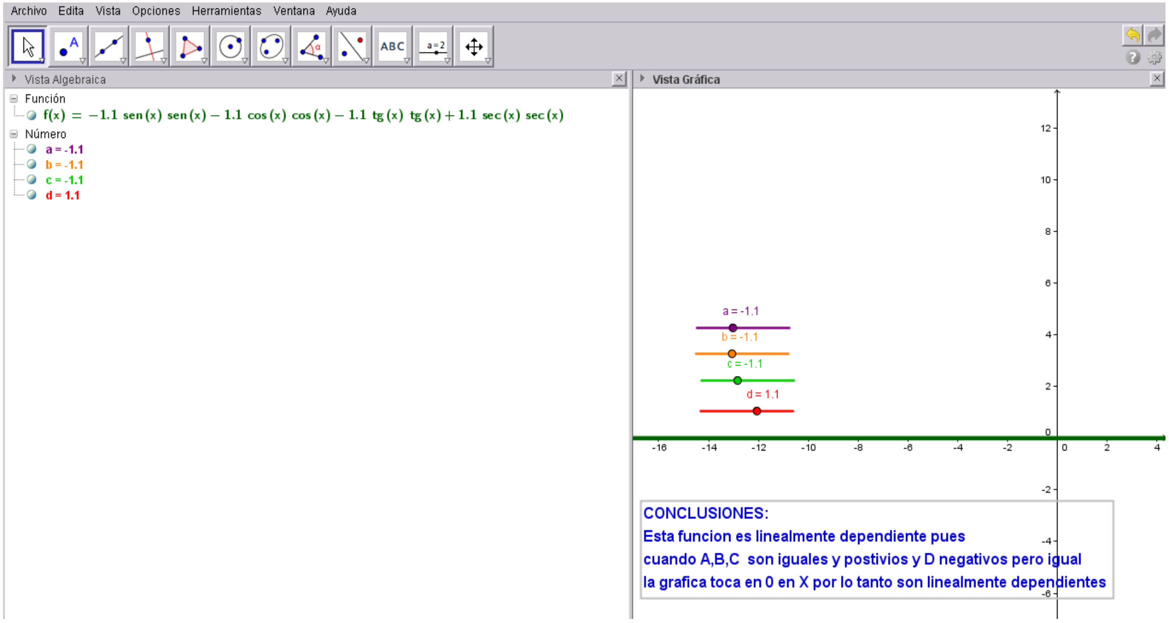


Figura 4 Conclusiones equipo 4, combinación de funciones primer inciso.

En resumen, tres de los cuatro equipos de estudiantes (un equipo mostró un resultado confuso) manifiestan en sus resultados que la utilización del software de geometría dinámico les permite encontrar más fácilmente una combinación lineal que les pueda orientar la respuesta a la pregunta planteada acerca de la independencia o dependencia lineal de las funciones. Sin embargo, también es cierto que en general no fueron capaces de utilizar dicha información para elaborar una conclusión o argumentación válida referente a la naturaleza de dichas funciones como la(s) solución(es) de una ecuación diferencial homogénea. Es notorio también que los estudiantes sí pudieron resolver la primera dificultad que consistía en hallar el valor de los coeficientes que permiten hablar de una posible relación de dependencia lineal, sobre todo en el segundo ejercicio, incluso un equipo dispuso de la herramienta de animación del software para realizar de una forma más óptima su análisis.

Dado que los resultados obtenidos nos permiten afirmar que la utilización del software coadyuva al análisis de este tipo de situaciones, se consideró viable proponer el diseño de una actividad de aprendizaje que incluyera una mayor guía y control por parte del profesor para monitorear si el concepto de independencia lineal se está comprendiendo de forma más integral.

La actividad de aprendizaje propuesta

Considerando los resultados de la actividad piloto o preliminar, así como la revisión de la literatura al respecto de los elementos que deben contener las actividades de aprendizaje, a continuación describimos primeramente el enunciado de la actividad, que es el material que se les proporcionaría directamente a los estudiantes, pero también incluimos un cuadro que muestra las relaciones entre los elementos que conforman la estructura general de la actividad (figura 5), y posteriormente la descripción más detallada de dichos elementos (cuadro 1). También consideramos un bosquejo de la ruta hipotética de solución (ver cuadro 2), que permite que el profesor tenga un esquema muy claro de cómo podrían sus estudiantes abordar la solución de la actividad. Autores como Stein y Smith (1998), o Barrera y Reyes (2013), aconsejan definir todos estos elementos cuando se diseñan actividades de aprendizaje.

Enunciado de la actividad

Primera parte (funciones que no se anulan en combinación lineal)

Dadas las funciones $f(x) = x + 3;$ $g(x) = x^2 + 5x - 1$; utilice Geogebra y el comando deslizador para determinar si en la combinación lineal $C_1 f(x) + C_2 g(x)$ pueden existir constantes $C_1\ y\ C_2$ que verifiquen que la combinación se anule, ¿cuánto valen estas constantes?

¿Se puede afirmar que en general que las funciones $f(x) = mx + n;$ $g(x) = ax^2 + bx + c$ con *m,n,a,b* y *c* constantes , (m y a diferentes de cero) forman una combinación lineal que vale cero solo si las constantes $C_1\ y\ C_2$ valen cero?

Repite lo anterior para las funciones $f(x) = sen(x)$; $g(x) = \cos(x)$

Segunda parte (funciones que si se anulan en combinación lineal)

Utilice Geogebra para representar las funciones $f(x) = sen^2(x);$ $g(x) = cos^2(x)$ ¿existen constantes $C_1\ y\ C_2$ que verifiquen $C_1 f(x) + C_2 g(x) = 0$?

Introduzca otra función más; h(x)=1; forme la combinación lineal $C_1 f(x) + C_2 g(x) + C_3 h(x)$

¿Existen constantes que logren que la combinación lineal valga cero? ¿Los valores de estas constantes son únicos? ¿En qué intervalo la combinación lineal se anula? ¿Qué significa que la combinación lineal de un conjunto de funciones valga cero? Repita lo anterior para el conjunto de funciones $\{f(x) = sen^2(x);\ \ g(x) = cos^2(x);\ \ h(x) = \cos(2x)\}$ ¿Qué significa que un conjunto de funciones sea linealmente independiente?

Tercera Parte

Proponga dos diferentes conjuntos de funciones que sean linealmente dependientes y verifique su afirmación usando Geogebra y el comando deslizador.

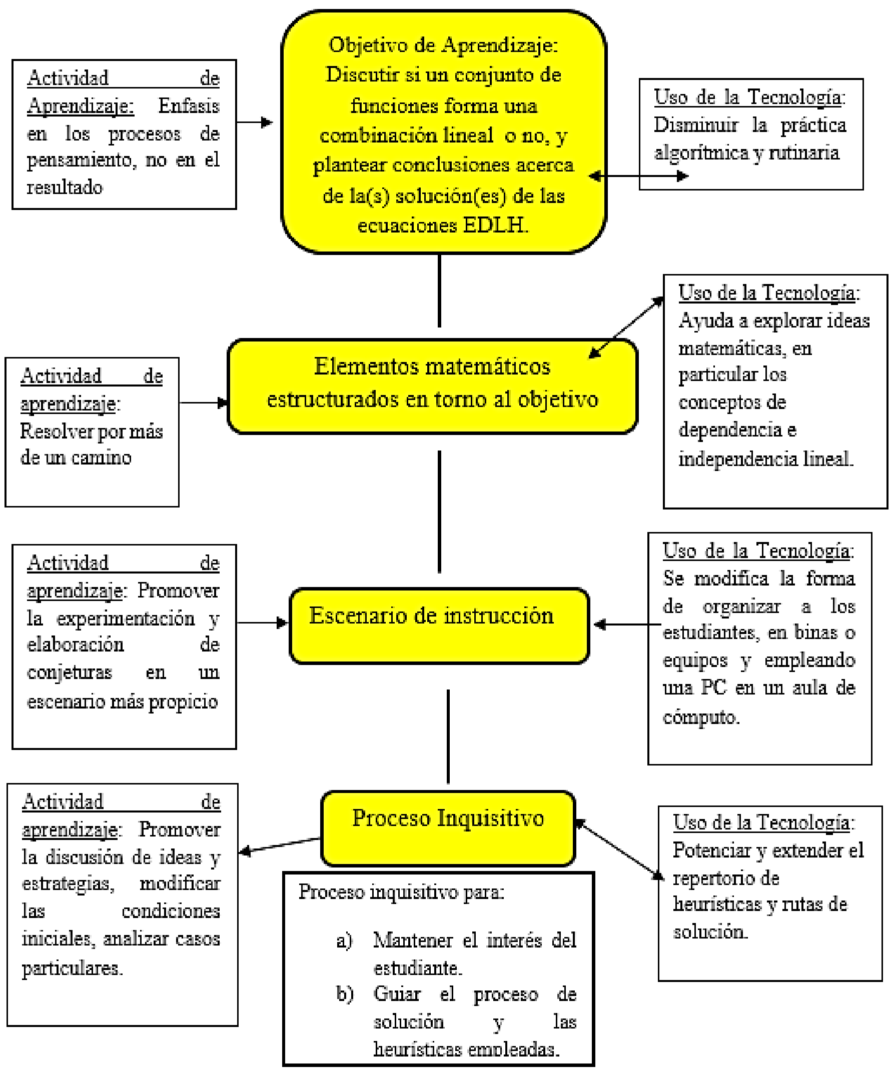


Figura 5 Elementos estructurados en la actividad de aprendizaje.

Tabla 1 Descripción de los elementos de la actividad de aprendizaje.

Objetivos de Aprendizaje

(i) Identificar en qué condiciones se cumple la dependencia o independencia lineal en un conjunto de funciones.

(ii) Transitar entre los registros algebraico y geométrico, para coadyuvar en la solución.

(iii) Incorporar un recurso tecnológico para apoyar el discernimiento entre la dependencia o independencia lineal en un conjunto de funciones.

(iii) Articular el registro geométrico para proponer una conclusión acerca de la(s) solución(es) de una ED.

Elementos matemáticos estructurados en torno al objetivo de aprendizaje

Conocimientos matemáticos previos

(i) El concepto formal de dependencia e independencia lineal.

(ii) Relaciones entre los coeficientes de las funciones.

(iii) Combinaciones lineales nulas y no nulas.

(iv) Utilización de lenguaje algebraico.

Conocimientos informáticos previos

Utilización de algunos comandos del software de geometría dinámica geogebra, tales como: definición de deslizadores, herramienta de animación. Se espera que la interacción del estudiante con el software de geometría dinámica, le permita establecer rápidamente conexiones conceptuales entre las condiciones para poder construir el gráfico de las funciones involucradas, la relación con el valor numérico de sus coeficientes, así como observar por medio de la animación el comportamiento que tendrían, y si es posible o no que exista una combinación lineal de ellas.

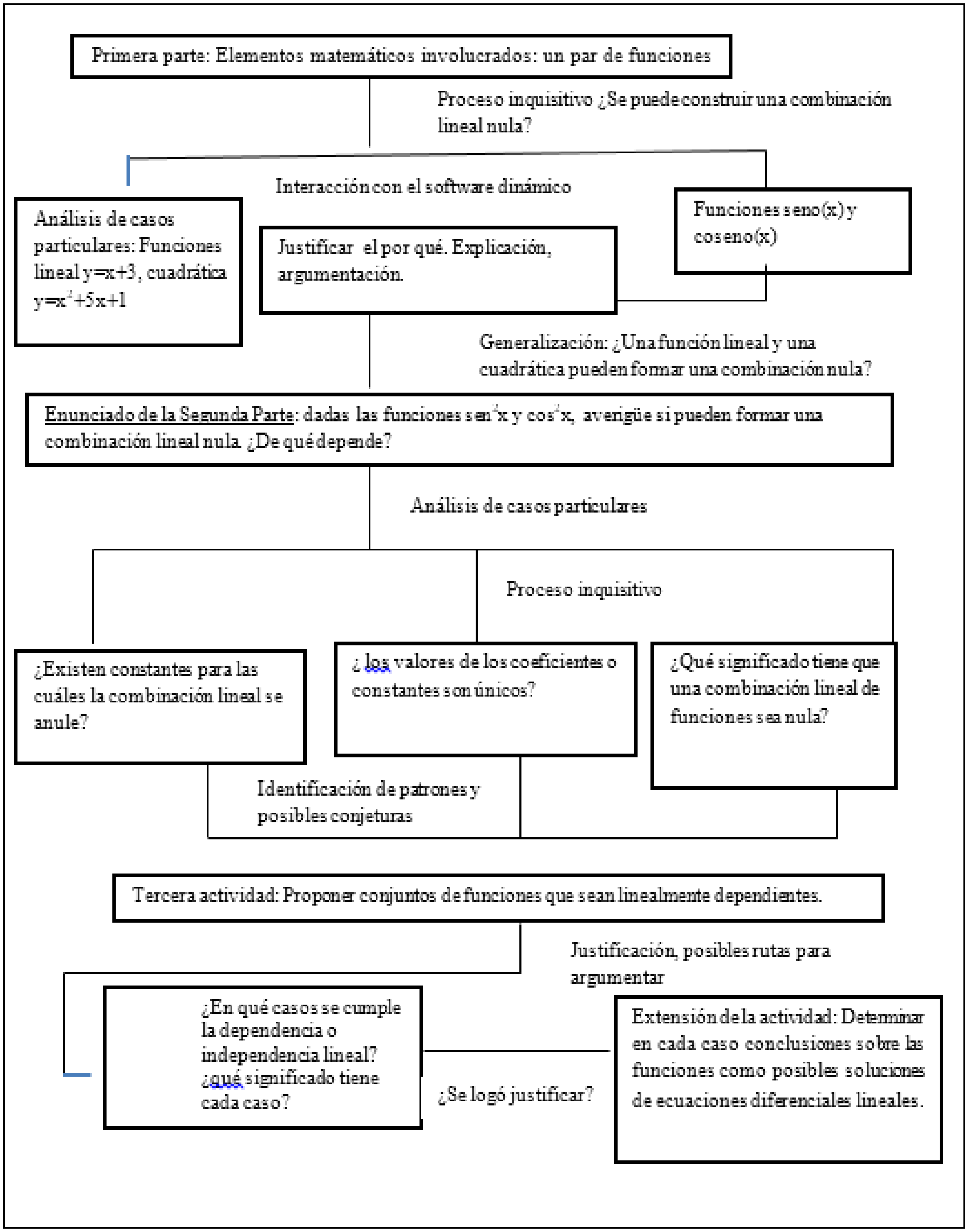
Escenario de la tarea.

Se requiere de un aula con pizarrón, pantalla de proyección, equipos de cómputo con software dinámico para cada estudiante y para el profesor, además de cañón proyector. Los estudiantes serán organizados de la siguiente forma: al inicio de la actividad trabajarán de forma individual, seguirán las indicaciones dadas por el profesor, realizarán las construcciones que éste les solicite, para lo cual será indispensable que se utilice el recurso del cañón proyector como guía para los estudiantes. Posteriormente cuando se pasa a la etapa de tratar de argumentar los criterios o condiciones solicitadas en la actividad y las posibles conjeturas surgidas con la interacción entre estudiante-software-profesor, los estudiantes trabajarán en parejas, se espera que el intercambio de ideas les permita justificar las conjeturas que posiblemente fueron planteadas en la etapa inicial. Se dispondrá de una sesión de una hora para el trabajo propuesto.

Proceso Inquisitivo

Durante la ejecución de la tarea de aprendizaje por parte de los estudiantes, el profesor debe tener especial cuidado en hacer preguntas relevantes que motiven a los estudiantes a trabajar en los aspectos propios de la actividad, a tratar de justificar sus observaciones, a comunicar sus ideas y resultados. Parte de este proceso inquisitivo está destinado además, a mantener el interés durante el tiempo que transcurre durante la solución de la tarea. Se considera también que las preguntas que el profesor realice no deben ayudar de más al estudiante, pero por otro lado deben ser enunciadas para que lo guíen en su trabajo.

Tabla 2 Ruta hipotética de solución.



4. Conclusiones

Con base en los resultados mostrados por la prueba preliminar consideramos que la utilización de una herramienta de geometría dinámica les permite a los estudiantes potenciar la búsqueda y exploración de diferentes rutas y eventualmente encontrar más fácilmente una combinación lineal. Es notorio también que los estudiantes sí pudieron resolver en forma adecuada los retos técnicos, por ejemplo para hallar el valor de los coeficientes que permitían hablar de una posible relación de dependencia lineal, implementaron la herramienta disponible del deslizador. Esto fue apreciado sobre todo en el segundo ejercicio, dónde incluso un equipo implementó también de forma adecuada la herramienta de animación del software para realizar de una forma más óptima su análisis. Todo esto nos habla de que en general el escenario dispuesto con el empleo de las TIC’s permite al estudiante potenciar rutas de solución, además de que al tomar un mayor control de las acciones puede incidir positivamente en su interés por terminar la actividad.

Empero, también es cierto que en general no fueron capaces de completar la tercera parte de la actividad, esto es, que la información que obtuvieron acerca de la posible dependencia o independencia lineal de un conjunto de funciones, no les resultó suficiente para elaborar una conclusión o argumentación válida referente a la naturaleza de dichas funciones como la(s) solución(es) de una ecuación diferencial lineal, de modo que habría que pensar en la extensión de este trabajo. Con la experiencia obtenida de la implementación de la actividad preliminar, además de la consideración de los elementos estructurales que debe poseer una actividad de aprendizaje según los marcos teóricos consultados, pudimos diseñar una actividad más acabada que la preliminar, en la que el docente, mediante un proceso inquisitivo, puede favorecer distintas actividades en el estudiante, tales como la indagación, la elaboración de preguntas y conjeturas, el análisis de casos particulares y la generalización, entre otras; actividades que son consideradas idóneas para el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante. Finalmente consideramos aplicar esta actividad en el aula con la intención de evaluar sus resultados y poder definir posibles ajustes en pro de su mejora.

5. Bibliografía y Referencias

[1] Barrera, F. & Reyes, A. (2013). Elementos Didácticos y Resolución de Problemas: Formación Docente en Matemáticas. México: Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.

[2] Cornejo, M. & Quintana, P. (2008) Método de Soluciones de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones. México: Reverté.

[3] Fogiel, (2004). The differential Equations Problem Solver. A Complete Solution Guide to any Textbook. New Jersey, USA: Staff of Research & Education Association.

[4] Hitt, F. (2002). Álgebra Lineal. México: Prentice Hall.

[5] Salas, Hille & Etgen. (2008). Calculus: una y varias variables. Vol II. México: Reverté.

[6] Santos, M. (2010). A mathematical problem solving approach to identify and explore instructional routes based on the use of computational tools. En J. Yamamoto, J. Kush, R. Lombard & J. Hertzog (Eds.). Technology implementation and teacher education: reflective models (pp. 296-313). Hershey, New York, USA: Information Science Reference.

[7] Pea, R. (1985). Beyond amplification: using the computers to reorganize mental functioning. Educational Psychologist 20(4), 167-182.

[8] Stein, M. & Smith, M. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: from research to practice. Mathematics Teaching in the Middle School 3, 268 – 275.

[9] Arzamendi, S. (2009) Una presentación gráfica del tema de dependencia lineal de funciones. Ponencia presentada en el Tercer Foro de Ciencias Básicas. Facultad de Ingeniería, UNAM. 22 al 24 de abril. http://dcb.fic.unam.mx/Eventos/Foro3/Memorias/Ponencia_01.pdf

[10] OROPEZA, C. & LEZAMA,J. (2007). Dependencia e independencia lineal: una propuesta de actividades para el aula. Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias 2(1), pp. 23 – 39.