

ELIMINACIÓN ALGEBRAICA Y EL MÉTODO NEWTON-HOMOTOPÍA: DOS MÉTODOS EFICIENTES EN LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES COMPUESTAS POR POLINOMIOS

ALGEBRAIC ELIMINATION AND THE NEWTON-HOMOTOPY METHOD: TWO EFFICIENT METHODS FOR SOLVING POLYNOMIAL EQUATIONS

Jaime Gallardo Alvarado

Tecnológico Nacional de México en Celaya, México
jaime.gallardo@itcelaya.edu.mx

Martín Caudillo Ramírez

Tecnológico Nacional de México en Celaya, México
martin.caudillo@itcelaya.edu.mx

Carlos R. Aguilar Nájera

Tecnológico Nacional de México en Celaya, México
rafael.aguilar@itcelaya.edu.mx

Luciano Pérez González

Tecnológico Nacional de México en Celaya, México
luciano.perezr@itcelaya.edu.mx

Recepción: 8/agosto /2019

Aceptación: 27/septiembre/2019

Resumen

En este trabajo se describen de manera simple y detallada dos métodos de solución de ecuaciones compuestas por polinomios que usualmente surgen en el análisis y síntesis de mecanismos: i) la eliminación dialítica de Sylvester, ii) el método de Newton-homotopía. Ambos métodos han sido aplicados de manera exitosa en diversos problemas en el área de robótica, especialmente en el análisis cinemático directo de manipuladores espaciales. Sin embargo, estudiantes de ingeniería experimentan ciertas dificultades en su aplicación en materias fundamentales como mecanismos dada la estructura de las materias de matemáticas correspondientes. Por tal motivo, el presente trabajo está dedicado a aquellas personas que se inician en el tema. Los métodos matemáticos aquí

expuestos se aplican en el análisis de posición directo del mecanismo plano de cuatro barras.

Palabras Clave: Cinemática, Eliminación dialítica, Mecanismo, Newton-Raphson, Homotopía, Polinomio.

Abstract

In this paper we describe in a simple and detailed way two methods of solution of equations composed by polynomials that usually arise in the analysis and synthesis of mechanisms: i) the dialytic Sylvester method of elimination, ii) the Newton-homotopy method. Both methods have been applied successfully in diverse problems in the area of robotics, especially in the direct kinematics of spatial manipulators. However, undergraduate students undergo certain difficulties in their application in fundamental courses as mechanisms given the structure of the mathematics courses. For this motivation, the presented work is dedicated to those people who are initiated in the subject. The mathematical methods here treated are applied in the forward position analysis of the four bar planar mechanism.

Keywords: *Dyalitic elimination, Homotopy, Kinematics, Mechanism, Newton-Raphson, Polynomial equation.*

1. Introducción

La modelación matemática de muchos fenómenos físicos en aplicaciones de ingeniería conduce a ecuaciones formadas por polinomios y entonces existe a menudo la necesidad de resolver sistemas de ecuaciones polinomiales de orden superior. Más aún, si las soluciones no tienen que ser computadas explícitamente, entonces es conveniente estudiar la naturaleza misma de las soluciones con el propósito de obtener soluciones prácticas y útiles. En ese sentido cabe mencionar que problemas de ingeniería se pueden formular fácilmente utilizando polinomios con la ayuda de variables adicionales, en cuyo caso se vuelve necesario posteriormente eliminar algunas de esas variables dando lugar a una intensiva línea de investigación denominada “*eliminación algebraica*”. Los métodos más sobresalientes fueron desarrollados en el siglo XVIII por Newton, Euler y Bezout, en

el siglo XIX por Sylvester y Cayley, y las primeras partes del siglo XX por Dixon y Macaulay. Estos ilustres matemáticos intentaban extender las técnicas simples del álgebra lineal desarrolladas para las ecuaciones lineales a las ecuaciones polinomiales no lineales. La idea es simple y elegante: considerar potencias de variables como si fuesen variables lineales y entonces analizar bajo qué condiciones los sistemas “lineales” de ecuaciones correspondientes son congruentes, descartando soluciones triviales y tomando en cuenta solamente soluciones al infinito. La eliminación dialítica de Sylvester, y uno de los motivos de la presente contribución, cuenta con un lugar destacado dentro de la “eliminación algebraica”. Por otra parte, si bien es cierto que la eficiencia y exactitud de la eliminación dialítica de Sylvester son atributos bien probados e innegables, también es cierto el hecho de que los polinomios resultantes se vuelven “intratables”, por decir lo menos, a medida que se incrementa el número de variables, y es así que es necesario recurrir a otros métodos de solución. Homotopía es una de esas alternativas. En su origen más básico, homotopía expresa el proceso de deformación o transformación continua de un objeto en otro y durante las últimas décadas este método ha demostrado ser una herramienta poderosa y eficaz para resolver problemas de cinemática como lo son el análisis y síntesis de mecanismos. Como muestra de ello considere que Roth y Freudenstein [1963] fueron los primeros en aplicar la técnica “bootstrap”, que en aquellos ya lejanos años se consideraba como una especie de método de continuación numérico “inmaduro” para resolver problemas de cinemática. Tsai y Morgan [1985] aplicaron el método de homotopía en la cinemática inversa de un manipulador serial de arquitectura general. Dicha contribución estimuló la derivación de las soluciones de eliminación resultantes en manipuladores seriales [Lee y Liang 1988, Raghavan y Roth 1989]. Otro problema abierto extremadamente atractivo es la solución del análisis de posición directo de la plataforma Gough-Stewart [Gough y Whitehall 1962, Stewart 1965]. Sin duda el problema más retador en las últimas décadas en la cinemática moderna. En ese sentido los esfuerzos en el área son formidables. Utilizando el método de continuación de homotopía, Raghavan [1993] fue el primero en elucidar que existen como máximo 40 configuraciones genéricas de una plataforma general Gough-

Stewart. Posteriormente, Wampler [1996] confirmó el mismo número de configuraciones mediante el uso de coordenadas soma o cuaterniones duales. Las estrategias más elegantes que se pueden encontrar en la literatura son aquellas que se centran en la reducción de polinomios compuestos por múltiples variables a un polinomio de orden 40 con una sola variable [Innocenti 2001, Rolland 2005]. Para una revisión completa sobre aplicaciones del método de homotopía en cinemática se sugiere consulte [Wampler y Morgan 1990, Sommese et al 2004].

En la presente contribución se aplica, además de la eliminación dialítica de Sylvester, una combinación del método usual de Newton-Raphson y el de homotopía [Wu 2005, 2006; Gallardo-Alvarado 2019] en la solución de ecuaciones compuestas por polinomios. Los métodos se ejemplifican numéricamente en la solución del análisis de posición directo del mecanismo articulado plano de cuatro barras. Se espera que con esta contribución personas no expertas en el tema sean capaces de resolver sistemas de ecuaciones formadas por polinomios de una manera precisa y abarcando la mayor cantidad de soluciones posibles.

2. Métodos

Eliminación dialítica de Sylvester

El objetivo básico de este método consiste en reducir un sistema de ecuaciones formado por polinomios mediante eliminación de variables a una sola ecuación denominada eliminante o resultante.

El método fue introducido por Cayley a mediados del siglo XIX [Cayley, 1848] y es relativamente fácil de aplicar en sistemas de ecuaciones formados por pocas variables, menos de 4 variables es razonable. Ciertamente, el polinomio resultante puede crecer exponencialmente de acuerdo al número, y por supuesto grado, de los polinomios inicialmente involucrados generándose un gran número de soluciones poco útiles o espúreas.

Básicamente la eliminación dialítica de Sylvester se fundamenta en siete pasos:

1. Suprimir una variable y reescribir las ecuaciones originales sin dicha variable.
2. Redefinir las variables restantes como si fuesen variables lineales asociadas a expresiones polinomiales manipulables.

3. A partir de las ecuaciones originales, generar nuevas ecuaciones linealmente independientes de acuerdo al número de variables del paso 2.
4. Construir la matriz de Sylvester con los coeficientes de las variables generadas en el paso 3 e igualar el determinante de dicha matriz a cero. Este paso produce un polinomio en el que reaparece la variable suprimida en el paso 1.
5. Determinar las soluciones del polinomio obtenido en el paso 4. En sistemas simples, estas soluciones corresponden a los posibles valores de la variable suprimida.
6. Recursivamente substituir los valores de la variable suprimida obtenidos en el paso 5 y repetir el proceso para las variables restantes.

Finalmente, cabe mencionar que el método de la eliminación dialítica de Sylvester se aplica prácticamente en automático cuando el sistema está formado por solo dos variables. Sin embargo, para sistemas con 3 o más variables se requiere de cierta experiencia en la formulación de las nuevas variables lineales, como ejemplo se sugiere consulte Gallardo-Alvarado et al [2008].

El método de Newton-homotopía

El método de Newton-Homotopía es una combinación del método usual de Newton-Raphson para resolver sistemas de ecuaciones no lineales y el de homotopía. A diferencia del método de Newton-Raphson, con el método Newton-homotopía es posible eliminar el problema de divergencia, así como el inconveniente de obtener una solución única. En robótica el tema toma relevancia si se reconoce que en problemas básicos como lo es la configuración del espacio de trabajo de un manipulador se requieren todas las soluciones de la cinemática directa e inversa del mismo. En ese sentido, la simplicidad del método contrasta con su eficiencia.

En los siguientes párrafos se resume el método Newton-homotopía. Suponga que se tiene un sistema de ecuaciones no-lineales el cual se denota de manera compacta en ecuación 1.

$$f(w) := [f_1(w), \dots, f_n(w)] \quad (1)$$

Donde n es el número de ecuaciones por resolver mientras que w denota al conjunto de variables del sistema. El método Newton-homotopía requiere como un paso inicial que las ecuaciones por resolver se modifiquen omitiendo algunos términos y se adicionen nuevos términos de tal manera que el sistema resultante sea susceptible de incorporar un sistema inicial de soluciones fácil de suponer y libre de divergencia. Posteriormente, los coeficientes son deformados/perturbados en los coeficientes del sistema original por una serie de pequeños incrementos. Por ejemplo, suponga que se requiere resolver el sistema $f(w) = 0$, entonces se define una función auxiliar de homotopía $g(w)$ dada por ecuación 2.

$$g(w) := [g_1(w), \dots, g_n(w)] \quad (2)$$

Cabe mencionar que la función $g(w)$ no requiere de condiciones especiales para su selección. Por ejemplo, una elección sencilla puede ser una composición de combinaciones lineales de las variables involucradas, es decir, una posibilidad es la ecuación 3.

$$g(w) = \begin{bmatrix} g_1(w) \\ \vdots \\ g_n(w) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^1 w_1 + \dots + \lambda_n^1 w_n + \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda_1^n w_1 + \dots + \lambda_n^n w_n + \lambda^n \end{bmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathfrak{R} \quad (3)$$

Otras posibilidades más *extravagantes* pueden ser funciones trigonométricas, ecuación 4.

$$g(w) = \begin{bmatrix} g_1(w) \\ \vdots \\ g_n(w) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^1 \text{sen}(w_1) + \dots + \lambda_n^1 \text{sen}(w_n) + \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda_1^n \text{sen}(w_1) + \dots + \lambda_n^n \text{sen}(w_n) + \lambda^n \end{bmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathfrak{R} \quad (4)$$

O funciones de tipo exponencial, ecuación 5.

$$g(w) = \begin{bmatrix} g_1(w) \\ \vdots \\ g_n(w) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^1 e^{w_1} + \dots + \lambda_n^1 e^{w_n} + \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda_1^n e^{w_1} + \dots + \lambda_n^n e^{w_n} + \lambda^n \end{bmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathfrak{R} \quad (5)$$

Una vez seleccionada la función auxiliar $g(w)$ se define la función múltiple de homotopía $H(w, t) := [h_1(w), \dots, h_n(w)]$, ecuación 6.

$$H(w, t) := t \begin{bmatrix} f_1(w) \\ \vdots \\ f_n(w) \end{bmatrix} + (1 - t) \begin{bmatrix} g_1(w) \\ \vdots \\ g_n(w) \end{bmatrix} \quad (6)$$

Donde t es un parámetro arbitrario dado en el intervalo $[0,1]$. De esta manera se tienen dos condiciones extremas, ecuación 7.

$$\left. \begin{aligned} H(w, 0) &= g(w) \\ H(w, 1) &= f(w) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Las cuales representan la base del método de homotopía: dos aplicaciones continuas $f, g: X \rightarrow Y$ se consideran homotópicas si existe otra aplicación, por supuesto también continua, $H: X \times [0,1] \rightarrow Y$. La idea fundamental del método consiste en resolver $H(w, t) = 0$ en lugar de $f(w) = 0$ considerando para ello pequeñas variaciones del parámetro t y recurriendo al método clásico de Newton-Raphson para su solución. Con estas consideraciones en mente, las iteraciones correspondientes se ejecutan de acuerdo a la ecuación 8 y la matriz Jacobiana del sistema modificado por la ecuación 9.

$$w_{m+1} = w_m - J(w_m)^{-1}H(w_m, t) \quad (8)$$

$$J(w_m) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(w)}{\partial w_1} & \frac{\partial h_1(w)}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial h_1(w)}{\partial w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n(w)}{\partial w_1} & \frac{\partial h_n(w)}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial h_n(w)}{\partial w_n} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Por supuesto, a fin de evitar caer en divergencia, el valor del sistema inicial de la función auxiliar de homotopía $g(w)$ debe seleccionarse de tal manera que $\det(J(w_{iter})) \neq 0$.

Finalmente, el método Newton-homotopía es muy apropiado en aquellos sistemas complejos compuestos de un gran número de variables en los que se espera una gran cantidad de soluciones. Por ejemplo, el análisis de posición directo del manipulador paralelo 5-(Revoluta+Prismático+Universal+Revoluta) puede arrojar hasta una cantidad impresionante de 1380 soluciones [Masouleh et al 2011a, 2011b]. Afortunadamente con el método Newton-homotopía es posible obtener las soluciones reales en unos sencillos pasos [Gallardo-Alvarado et al 2019]. Para información más detallada de esta sección se sugiere al lector consultar Wu [2005,2006], Gallardo-Alvarado [2019].

3. Resultados

Esta sección presenta una aplicación extremadamente sencilla de los métodos de solución de ecuaciones no lineales considerados en la contribución, el análisis de posición directo del mecanismo articulado plano compuesto por cuatro barras. La figura 1 muestra un mecanismo articulado plano de cuatro barras. La geometría del mecanismo se explica de la siguiente manera. Las longitudes de los eslabones se designan como a_0 (eslabón fijo), a_1 (eslabón motriz), a_2 (eslabón acoplador) y a_3 (eslabón de salida). Por su parte, de los ángulos interiores el ángulo θ_0 se selecciona como el ángulo de entrada y por lo tanto el ángulo θ_3 se denomina ángulo de salida. Más aún, los puntos P_0 , P_1 , P_2 y P_3 denotan las coordenadas, expresadas en el sistema de referencia XY , de las articulaciones del mecanismo. Bajo esta notación considere que los parámetros, y ángulo de entrada, del mecanismo vienen dados por: $a_0 = 0.75 \text{ mm}$, $a_1 = 0.25 \text{ mm}$, $a_2 = 0.5 \text{ mm}$, $a_3 = 0.5 \text{ mm}$, $\theta_0 = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$.

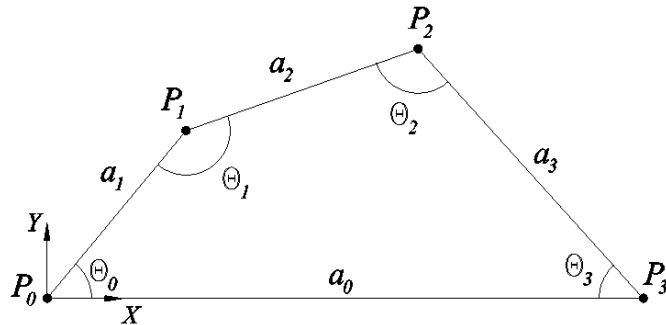


Figura 1 Mecanismo articulado plano de 4 barras y sus parámetros geométricos.

El análisis de posición directo consiste en determinar el ángulo de salida θ_3 a partir de los parámetros del mecanismo y su ángulo de entrada θ_0 . La solución en forma cerrada de este problema se puede consultar en cualquier libro estándar de mecanismos [Shigley 1970, Erdman et al 2001] y su inclusión en esta sección ejemplifica de manera excelente la aplicación de la eliminación dialítica de Sylvester así como el método Newton-homotopía.

Como un paso intermedio es necesario determinar las coordenadas (X_2, Y_2) del punto P_2 . En ese sentido se establecen las ecuaciones de clausura, ecuaciones 10 y 11. Donde claramente $X_1 = a_1 \cos(\theta_1)$, $Y_1 = a_1 \sin(\theta_1)$, $X_3 = a_0$ y $Y_3 = 0$.

$$(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 = a_2^2 \quad (10)$$

$$(X_2 - X_3)^2 + (Y_2 - Y_3)^2 = a_3^2 \quad (11)$$

Solución mediante la eliminación dialítica de Sylvester

Los pasos para obtener la solución son:

Paso 1. Suprimiendo la variable Y_2 , las ecuaciones 1 y 2 se reescriben como ecuaciones 12 y 13.

$$AX_2^2 + BX_2 + C = 0 \quad (12)$$

$$DX_2^2 + EX_2 + F = 0 \quad (13)$$

Donde los coeficientes vienen dados por:

$$A = 1, \quad B = -2X_1, \quad C = Y_2^2 - 2Y_1Y_2 + X_1^2 + Y_1^2 - a_2^2$$

$$D = 1, \quad E = -2X_3, \quad F = Y_2^2 - 2Y_2Y_3 + X_3^2 + Y_3^2 - a_3^2$$

Paso 2. Considere a X_2^3 , X_2^2 y 1 como si fuesen tres “variables lineales”

Paso 3. Puesto que se tienen tres variables, tal y como se indica en el paso 2, y se dispone de solo las ecuaciones 12 y 13 para su solución, genere dos ecuaciones adicionales multiplicando por X_2 a las ecuaciones 12 y 13, obteniéndose ecuaciones 14 y 15.

$$AX_2^3 + BX_2^2 + CX_2 = 0 \quad (14)$$

$$DX_2^3 + EX_2^2 + FX_2 = 0 \quad (15)$$

Paso 4. Matriz de Sylvester. Considere las ecuaciones 12 a 15 como un sistema de ecuaciones lineales cuyas variables son precisamente X_2^3 , X_2^2 , X_2 y 1. Por lo tanto, arreglando matricialmente dichas ecuaciones se obtiene ecuación 16.

$$\begin{bmatrix} 0 & A & B & C \\ 0 & D & E & F \\ A & B & C & 0 \\ D & E & F & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2^3 \\ X_2^2 \\ X_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Donde, la matriz 4×4 de coeficientes de las “variables” es precisamente la matriz de Sylvester.

Con la finalidad de satisfacer la ecuación 16, se tienen las siguientes posibilidades:

- i. La matriz 4x1 es la matriz cero. Sin embargo, es obvio que la variable 1 es diferente de 0 y por lo tanto esta posibilidad debe ser descartada.
- ii. La matriz de Sylvester es la matriz cero. Esta es la solución trivial y por lo tanto también debe ser descartada.
- iii. Soluciones al infinito. Se presentan cuando el determinante de la matriz de Sylvester es nulo. Desde un punto de vista matemático esta es la única posibilidad factible.

Después de este breve análisis, igualando a cero el determinante de la matriz Jacobiana se obtiene un polinomio de segundo orden en la variable suprimida Y_2 , ecuación 17.

$$-A^2F^2 + 2ADCF + AEBF - ACE^2 - D^2C^2 - DB^2F + DBCE = 0 \quad (17)$$

De esta manera con la substitución de datos numéricos se obtiene una expresión cuadrática, ecuación 18.

$$-1.75Y_2^2 + 0.378861142Y_2 + 0.19921875 = 0 \quad (18)$$

Resolviendo la ecuación 18, y considerando que X_2 se puede evaluar de la ecuación 10 u 11, se obtienen dos posibles soluciones del punto P_2 : (0.560,0.462), (0.314,-0.246). Una vez determinadas las coordenadas del punto P_2 el ángulo de salida admite dos posibilidades: $\theta_3 = 1.178 \text{ rad}, 3.655 \text{ rad}$. Por claridad, las dos posibles configuraciones del mecanismo se muestran en la figura 2.

Solución aplicando el método de Newton-homotopía

Con la finalidad de aplicar el método de Newton-homotopía, sin perder generalidad y sin que se tenga ninguna particularidad especial, se proponen las siguientes funciones auxiliares de homotopía, ecuaciones 19.

$$g_1 = 2X_2 + 2Y_2, \quad g_2 = X_2 - Y_2 + 1 \quad (19)$$

Con estas funciones y suponiendo valores iniciales (1,3) y (-1,-3) para el punto P_2 , el método Newton-homotopía arroja los resultados que se indican en la tabla 1.

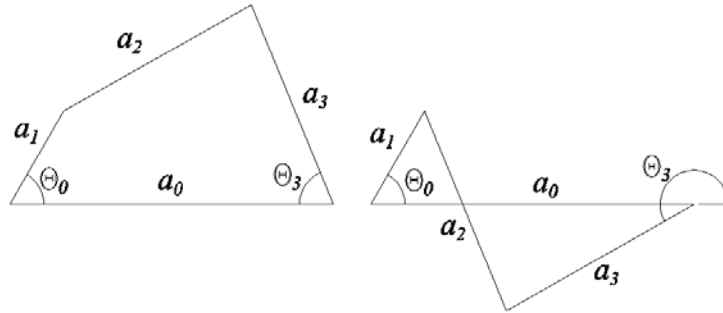


Figura 2 Las dos soluciones, aplicando eliminación algebraica, del análisis directo de posición del mecanismo articulado plano de cuatro barras.

Tabla 1 Resultados numéricos (iteraciones) aplicando el método Newton homotopía del análisis directo de posición del mecanismo articulado plano de cuatro barras.

Solución 1, (X_2, Y_2)	Solución 2, (X_2, Y_2)
(1.0, 3.0)	(-1.0, -3.0)
(.9323922259, 1.536883981)	(-.1325278238, -1.537275435)
(.7001685841, .8665120640)	(.1392700951, -.7526624059)
(.5975148520, .5701762654)	(.2631243946, -.3951258392)
(.5645873191, .4751226652)	(.3071095824, -.2681515385)
(.5603216597, .4628087672)	(.3145284433, -.2467351316)
(.5602475854, .4625949333)	(.3147522328, -.2460891068)

Los resultados obtenidos con el método Newton-homotopía son prácticamente los mismos que los que se generaron con la eliminación dialítica de Sylvester.

4. Discusión

La modelación matemática de muchos fenómenos físicos conduce a sistemas de ecuaciones no lineales. Por ejemplo, en cinemática es común el que en el análisis y síntesis de mecanismos surjan sistemas de ecuaciones polinomiales que por su complejidad obligan a la necesidad de implementar métodos eficientes y confiables para su solución. En ese sentido la eliminación algebraica y la homotopía son dos métodos ampliamente empleados en la comunidad cinemática. Dentro de la eliminación algebraica cabe destacar a la eliminación dialítica de Sylvester como uno de los métodos más simples y confiables. Por su parte, los métodos de

homotopía son preferidos cuando el número de variables involucrados es tal que si se aplica la eliminación algebraica entonces se generan polinomios tan extensos que su solución puede conducir a soluciones poco útiles e incluso espúreas. Más aún, el método Newton-homotopía es una combinación de la técnica clásica de Newton-Raphson y el de homotopía en la solución de ecuaciones no lineales. Cabe mencionar que a diferencia del método de Newton-Raphson, la combinación de éste con el método de homotopía permite obtener todas las soluciones reales de un sistema de ecuaciones, una ventaja indiscutible por ejemplo cuando se desea determinar el espacio de trabajo de un manipulador.

En este trabajo se explican de manera resumida los métodos de la eliminación dialítica de Sylvester y el de Newton-homotopía. Ambos métodos se ejemplifican en la solución del análisis de posición directo del mecanismo articulado plano de cuatro barras. Los resultados obtenidos con ambos métodos son prácticamente los mismos y se comprueban gráficamente mostrando las dos posibles configuraciones del mecanismo. Finalmente, el presente trabajo está dedicado a aquellas personas no expertas que se inician en el tema. Por ejemplo, el material expuesto en la contribución puede ser de ayuda significativa para aquellos estudiantes de ingeniería mecánica o carreras afines que cursan la materia de mecanismos.

5. Bibliografía y Referencias

- [1] Roth, B, Freudenstein, F. (1963) Synthesis of path-generating mechanisms by numerical methods. *ASME Journal of Engineering for Industry*. 85 (B3). Pp. 298-306.
- [2] Tsai, L.W., Morgan, A.P. (1985) Solving the kinematics of the most general six- and five-degree of freedom manipulators by continuation methods. *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automations in Design*. 107. Pp. 189-200.
- [3] Lee, H.-Y., Liang, C.-G. (1988) Displacement analysis of the general spatial 7-link 7R mechanism. *Mechanism and Machine Theory*. 23. Pp. 219-226.
- [4] Stewart, D., (1965). A platform with six degrees of freedom. *Proceedings Institution of Mechanical Engineers*. 180. Pp. 371-386.

- [5] Raghavan, M., Roth, B. (1989) Kinematic analysis of the 6R manipulator of general geometry. International Symposium on Robotics Research, MIT Press. Pp. 314-320.
- [6] Gough, V.E., Whitehall, S.G. (1962) Universal tyre test machine. (1962) Proceedings of the FISITA Ninth International Technical Congress. Pp. 117-137.
- [7] Raghavan, M. (1993) The Stewart platform of general geometry has 40 configurations. ASME Journal of Mechanical Design. 115. Pp. 277-282.
- [8] Innocenti, C. (2001) Forward kinematics in polynomial form of the general Stewart platform. ASME Journal of Mechanical Design. 123. Pp. 254-260.
- [9] Wampler, C.W. (1996) Forward displacement analysis of general six-in-parallel SPS (Stewart) platform manipulators using soma coordinates. Mechanism and Machine Theory. 31. Pp. 331-337.
- [10] Rolland, L. (2005) Certified solving of the forward kinematics problem with an exact algebraic method for the general parallel manipulator. Advanced Robotics. 19. Pp. 995-1025.
- [11] Wampler, C.W., Morgan, A.P., Sommese, A.J. (1990) Numerical continuation methods for solving polynomial systems arising in kinematics. ASME Journal of Mechanical Design. 112 (1). Pp. 59-68.
- [12] Sommese, A. J., Verschelde, J., Wampler, C.W. (2004) Advances in polynomial continuation for solving problems in kinematics. ASME Journal of Mechanical Design. 126 (2). Pp. 262-268.
- [13] Wu, T.-M. (2005) A study of convergence on the Newton-homotopy continuation method. Applied Mathematics and Computation. 168. Pp. 1169-1174.
- [14] Cayley, A. (1848) on the theory of elimination. Cambridge Dublin Mathematics Journal. 3.
- [15] Wu, T.-M. (2006) The inverse kinematics problem of spatial 4P3R robot manipulator by the homotopy continuation method with an adjustable auxiliary homotopy function. Nonlinear Analysis. 64. Pp. 2373-2380.

- [16] Gallardo-Alvarado, J. (2019) An Application of the Newton-homotopy continuation method for solving the forward kinematic problem of the 3-RRS parallel manipulator. *Mathematical Problems in Engineering*. Artículo 3123808, 6 páginas.
- [17] Gallardo-Alvarado, J., Rodríguez-Castro, R., Islam, M.N. (2008) Analytical solution of the forward position analysis of parallel manipulators that generate 3-RS structures. *Advanced Robotics*. 22. Pp. 215-234.
- [18] Masouleh, M.T., Gosselin, C., Saadatzi, M.H., Kong, X., Taghirad, H.D. (2011a) Kinematic analysis of 5-RPUR (3T2R) parallel mechanisms. *Meccanica*. 46. Pp. 131-146.
- [19] Masouleh, M.T., Gosselin, C., Husty, M., Walter, D.R. (2011b). Forward kinematic problem of 5-RPUR parallel mechanisms (3T2R) with identical limb structures. *Mechanism and Machine Theory*. 46. Pp. 945-959.
- [20] Gallardo-Alvarado, J., Abedinnasab, M.H., Islam, Md.N. (2019) A simple method to solve the instantaneous kinematics of the 5-RPUR parallel Manipulator. *Robotica*. 37. Pp. 1143-1157.
- [21] Shigley, J.E. (1970) *Análisis Cinemático de Mecanismos*. McGraw-Hill.
- [22] Erdman, A.G., Sandor, G.N., Kota, S. (2001) *Mechanism Design: Analysis and Synthesis*. Vol. 1, 4ta. Edición. Prentice Hall.