

CONTROL DEL PENDUBOT: EL CASO DEL SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA MEDIANTE EL REGULADOR LINEAL

PENDUBOT CONTROL: THE TRAJECTORY TRACKING CASE BY LINEAR REGULATOR

Jalomo Cuevas Jaime

Tecnológico Nacional de México en Ciudad Guzmán
jaimejc@itcg.edu.mx

Lázaro Flores Erika Berenice

Tecnológico Nacional de México en Ciudad Guzmán
erika.lazflo@gmail.com

Iván Rafael Sánchez Luna

Tecnológico Nacional de México en Ciudad Guzmán
ivanrsluna@hotmail.com

Sergio Sandoval Pérez

Tecnológico Nacional de México en Ciudad Guzmán
chekosur@hotmail.com

Resumen

En este trabajo se presenta la solución al problema del seguimiento de trayectorias usando la teoría del regulador lineal aplicado al sistema subactuado conocido como péndubot. Se describen las pruebas de simulación en donde se validan las propiedades estabilidad y de robustez ante perturbaciones en el estado. También se propone una nueva manera de presentar este sistema a través de una visualización virtual creada para agregar un enfoque didáctico.

Palabra(s) Clave: Seguimiento de trayectorias, simulación, péndubot, estabilidad, robustez.

Abstract

In this paper, the solution to the trajectories tracking problem using the linear regulator theory applied to the subactuated system known as pendubot is presented. Also the simulation tests in order to validate the stability and robustness

properties against disturbances in the state are described. We present, the virtual visualization created for this system to add a focus.

Keyword(s): *Trajectories tracking, simulation, pendulum, stability, robustness.*

1. Introducción

Las aplicaciones de control teórico tienen como objetivo el establecer las bases de en laboratorio como previa actividad de validación de las técnicas antes de pasar a los resultados de campo (Katsuhiko, 2003). Durante este proceso, en la mayoría de los casos surgen variables, constantes, dinámicas y efectos no considerados por los análisis teóricos. Es por esta razón que un buen planteamiento teórico es de gran importancia para el éxito de los proyectos de mayor impacto, puesto que se benefician de la realización de la secuencia de estos procesos para detectar los errores de planteamiento, diseño o desarrollo (Chen, 1999), (Kailath, 1980). Además de que las pruebas de simulación dan la posibilidad de realizar cambios en las condiciones de funcionamiento de los sistemas a analizar y así verificar la especificación, sin comprometer la integridad de los sistemas físicos reales. Esto es de suma importancia en la actualidad, en donde se busca la implementación de filosofías de optimización de recursos materiales, energéticos y de tiempos de ejecución.

En el presente trabajo se muestra el diseño y los resultados obtenidos en la aplicación del esquema de control conocido como el regulador lineal sobre una planta compleja que incluye muy variadas dinámicas (Isidori, 1989), (Knobloch, 1994). Este sistema nombrado péndubot, puede representar el modelo de un edificio alto el cual en condiciones de viento o de sismos, presenta perturbaciones que pueden afectar su posición vertical, por lo que se usan sistemas y leyes de control para poder rechazar estas perturbaciones. El problema de control que se presenta es el del seguimiento de trayectorias senoidales, que logra que el péndubot presente una oscilación en el primer eslabón mientras que el segundo eslabón logra mantenerse en equilibrio vertical aún en presencia de perturbaciones externas. Dichas perturbaciones se aplican mediante una señal sumada al primer eslabón la cual se mantiene de forma permanente en el tiempo

(Khalil, 1996). Los resultados de simulación que se muestran están codificados en lenguaje G de Matlab así como en código, además se realizó el diseño de un entorno virtual de visualización el cual nos permite ver la ejecución del esquema de control en las escalas que la computadora ejecuta el programa, dando la posibilidad de usar esta aplicación como parte de los ejemplos que se utilicen en las asignaturas de control, puesto que una de las grandes críticas hacia los cursos de control es el excesivo uso de los recursos de la teoría, dejando de lado la parte práctica que también es importante de revisarse para lograr los objetivos del aprendizaje significativo.

2. Métodos

Teoría del regulador lineal

El resultado principal de regulador lineal se puede explicar a partir del siguiente resultado formal de teoría de sistemas:

- **Teorema 1:** Suponga que el exosistema: $dw/dt = Sw$ es antiestable, esto es: todos los eigenvalores de S tienen parte real no negativa, además suponga que el par (A, B) es estabilizable. Entonces el problema de la regulación de salida con información completa se puede solucionar si y solo si existen matrices Π y Γ , los cuales resuelven el sistema de ecuaciones 1 y 2.

$$\Pi S = A\Pi + B\Gamma + P \quad (1)$$

$$0 = C\Pi + Q \quad (2)$$

- De la demostración del teorema 1 se obtiene la estructura del controlador como se muestra en la ecuación 3 (Knobloch, 1994).

$$u = \Gamma w + K(x - \Pi w) \quad (3)$$

Descripción del sistema

En la figura 1 se describe el sistema a controlar, donde se pueden ver dos eslabones acoplados y solo un motor es por esto que se lo conoce como un

sistema subactuado, también es posible ver que tiene dos sensores angulares, para el caso son encoders que miden la posición del eslabón al cual están acoplados con respecto de una referencia la cual generalmente es la línea horizontal y dado que el segundo eslabón no tiene motor entonces es un problema de control el aplicar una fuerza al primer eslabón de manera que el segundo quede en equilibrio y resuelva alguno de los problemas de control.

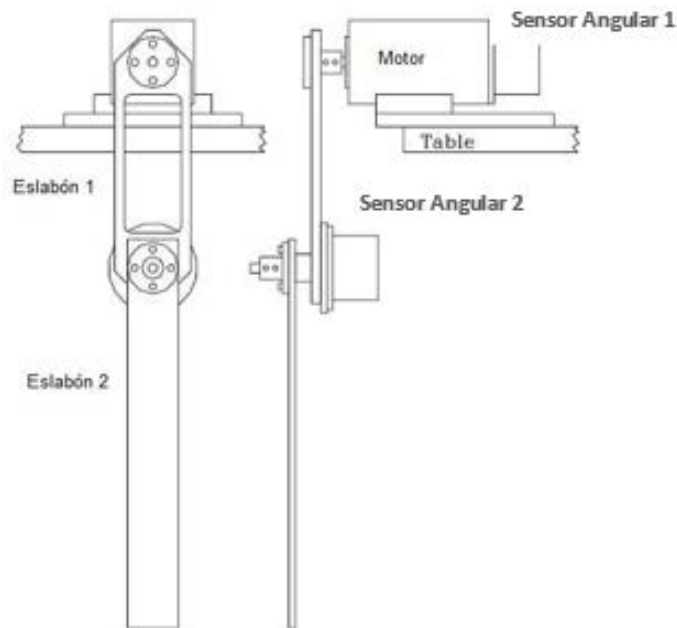


Figura 1 Sistema de pendubot.

Modelo Matemático

El modelo matemático del sistema se representa con las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0.0 & 0 & 1 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0 & 1 \\ 58.5498 & -21.8754 & -0.2259 & 0.0383 \\ -74.4305 & 83.7673 & 0.4444 & -0.1105 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0 \\ 41.4572 \\ -81.5470 \end{bmatrix}, C = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$$

Estas ecuaciones se obtienen al linealizar el modelo matemático no lineal sobre el punto de equilibrio del parte superior encontrado a partir de las ecuaciones 4 y 5.

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t) \quad (4)$$

$$y(t) = h(x(t)) = x_2(t) \quad (5)$$

Con

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ f_{31}(x) f_{32}(x) \\ f_{41}(x) f_{32}(x) + f_{42}(x) \end{bmatrix}; \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{31}(x) \\ f_{41}(x) \end{bmatrix}$$

Donde las ecuaciones 6 a 14 se incluyen dentro de las ecuaciones 15 a 19. Esto debido a la falta de espacio horizontal en el documento para presentar en una sola expresión.

$$d_{11}(x) = m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(x_2)) + I_{zz1} + I_{zz2} \quad (6)$$

$$d_{12}(x) = m_2 (l_2^2 + l_1 l_2 \cos(x_2)) + l_{zz1} \quad (7)$$

$$d_{22} = m_2 l_{c2}^2 + l_{zz2} \quad (8)$$

$$c_1(x) = -2m_2 l_1 l_{c2} x_4 x_3 \sin(x_2) - m_2 l_1 l_{c2} x_4^2 \sin(x_2) \quad (9)$$

$$c_2(x) = m_2 l_1 l_{c2} x_3 \sin(x_2) \quad (10)$$

$$g_1(x) = m_1 g l_{c1} \cos(x_1) + m_2 g (l_1 \cos(x_1) + l_2 \cos(x_1 + x_2)) \quad (11)$$

$$g_2(x) = m_2 g l_{c2} \cos(x_1 + x_2) \quad (12)$$

$$f_1(x) = \mu_1 x_3 \quad (13)$$

$$f_2(x) = \mu_2 x_4 \quad (14)$$

$$f_{31} = \frac{d_{22}}{d_{11}(x)d_{22} - d_{12}(x)^2} \quad (15)$$

$$f_{32}(x) = \frac{d_{12}(x)c_2(x)}{d_{22}} + \frac{d_{12}(x)g_2(x)}{d_{22}} + \frac{d_{12}(x)f_2(x)}{d_{22}} + c_1(x) + g_1(x) + f_1(x) \quad (16)$$

$$f_{41}(x) = -\frac{d_{12}(x)}{d_{11}(x)d_{22} - d_{12}(x)^2} \quad (17)$$

$$f_{42}(x) = -\frac{c_1(x)}{d_{22}} - \frac{g_2(x)}{d_{22}} - \frac{f_2(x)}{d_{22}} \quad (18)$$

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T \quad (19)$$

De acuerdo a los siguientes parámetros:

Longitud del eslabón 1	l_1	0.2032 m
Longitud del eslabón 2	l_2	0.3817 m

Distancia al centro de masas del eslabón 1	l_{c1}	0.1551 m
Distancia al centro de masas del eslabón 2	l_{c2}	0.1635 m
Masa del eslabón 1	m_1	0.8293 kg
Masa del eslabón 2	m_2	0.3402 kg
Momento de inercia para el eslabón 1	I_{zz1}	0.00595 kg·m ²
Momento de inercia para el eslabón 2	I_{zz2}	0.0043 kg·m ²
Fricción para el eslabón 1	μ_1	0.00545
Fricción para el eslabón 2	μ_2	0.00047
Constante gravitacional	g	9.81 m/s ²
Posición angular del eslabón 1	q_1	rad
Posición angular del eslabón 2	q_2	rad
Torque aplicado por el actuador al eslabón 1	τ	N·m

3. Resultados

En figura 2 se muestra el diagrama de Matlab diseñado para realizar el control propuesto en la sección 2.

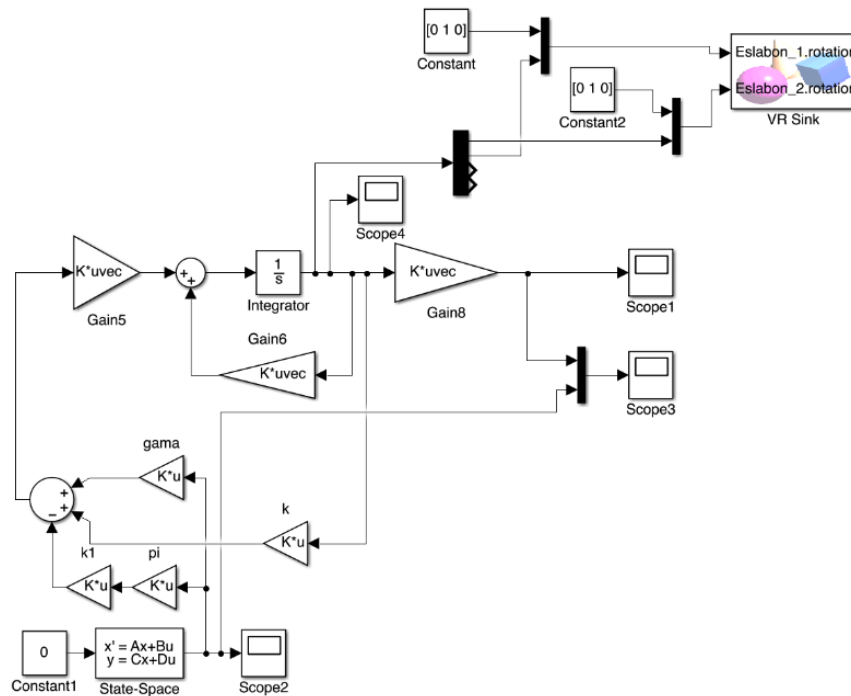


Figura 2 Diagrama de Matlab.

Ganancias usadas para el diseño del controlador y matriz del exosistema:

$$k = [26.8277 \quad 22.8466 \quad 5.8696 \quad 3.4704]$$

$$\Pi = [-0.8245e^{-4} \quad -0.97735;$$

$$0 \quad 1;$$

$$-1 \quad 0]$$

$$\Gamma = [7.433e^{-3} \quad 1.9315]$$

$$S = [0 \quad 1; -1 \quad 0]$$

En la figura 3 se presentan las gráficas de la salida del sistema ante una entrada de seguimiento senoidal. En la figura 4 se presentan las gráficas del control del sistema ante una entrada de seguimiento senoidal.

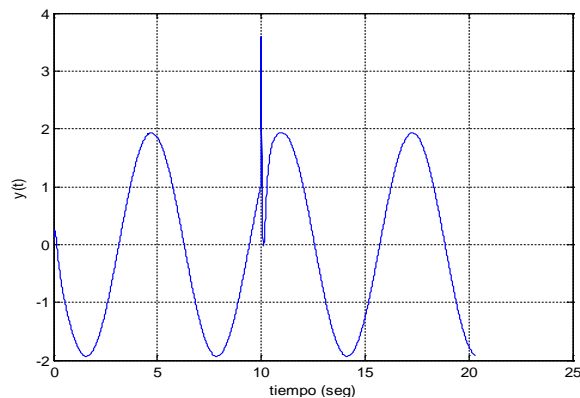


Figura 3 Posición del eslabón 1.

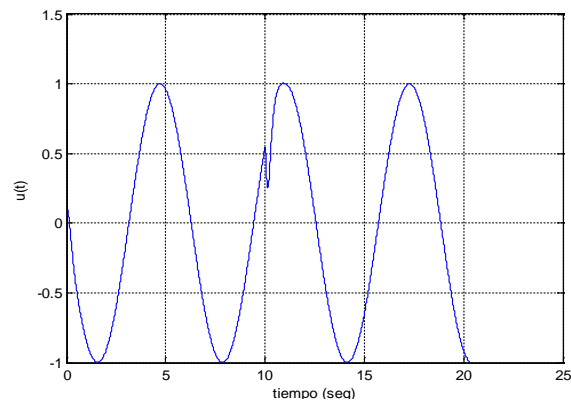


Figura 4 Gráfica de control.

En la figura 5 se muestra el entorno virtual usado para visualizar el comportamiento de la planta bajo la especificación.

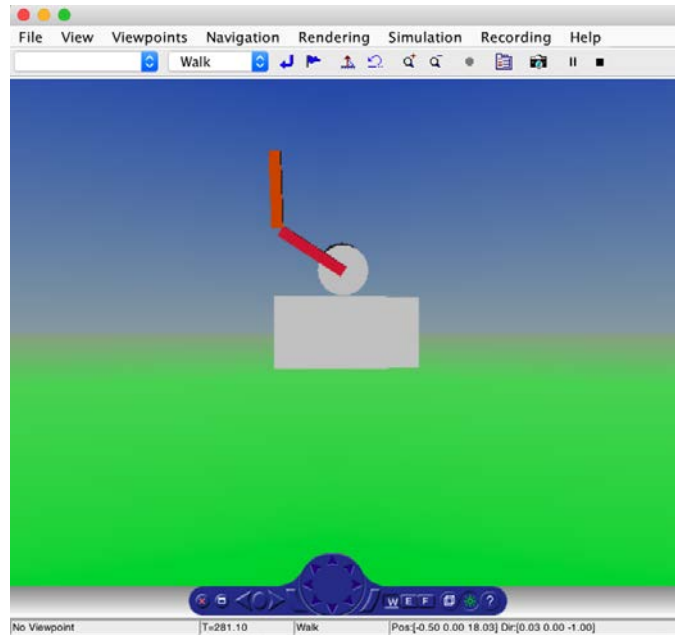


Figura 5 Entorno virtual.

4. Discusión

Las pruebas de simulación presentadas validan la eficiencia del controlador para la estructura lineal del modelo del pendubot. El controlador descrito presenta robustez al rechazo de perturbaciones en el estado. El modelo del pendubot muestra un buen desempeño en el seguimiento de trayectorias senoidales. Las herramientas de desarrollo de modelos virtuales son un muy buen recurso didáctico de difusión de las pruebas en simulación para las plantas que cuentan con subsistemas mecánicos.

5. Bibliografía y Referencias

- [1] Chen, Chi-Tsong, (1999), *Linear Systems Theory and Design*. Estados Unidos: Oxford University Press.
- [2] Isidori, Alberto. (1989), *Non Linear Control Systems*. Alemania: Springer Verlag.

- [3] Kailath, Thomas. (1980), *Linear Systems*. Estados Unidos: Prentice Hall.
- [4] Katsuhiko, Ogata. (2003), *Ingeniería de Control Moderna*. España: Prentice Hall.
- [5] Khalil, Hassan. (1996), *Nonlinear Systems*. Estados Unidos: Pearson.
- [6] Knobloch, Hans. (1994), *Topics in Control Theory*. Suiza: Birkhauser Verlag.