Obtención y Validación de la Serie de Fourier para el Análisis del Contenido Armónico en un Control por Fase

Enrique Arévalo Zamudio

U.A.M.-Azcapotzalco, Av. San Pablo 180,02200, Azcapotzalco, D.F., México. Tel. 5318-9030 y 5318-9040, Fax: 5394-6843. arzaen@yahoo.com.mx

Roberto A. Alcántara Ramírez

U.A.M.-Azcapotzalco, Av. San Pablo 180,02200, Azcapotzalco, D.F., México. Tel. 5318-9030 y 5318-9040, Fax: 5394-6843.

raar@correo.azc.uam.mx

Miguel Magos Rivera

U.A.M.-Azcapotzalco, Av. San Pablo 180,02200, Azcapotzalco, D.F., México. Tel. 5318-9030 y 5318-9040, Fax: 5394-6843.

mrm@correo.azc.uam.mx

Resumen

En este trabajo se expone el análisis del contenido armónico de un circuito convertidor de CA/CA basado en la técnica de Control por Fase. En primer lugar se presenta el cálculo de los coeficientes de la Serie de Fourier correspondientes a la forma de onda de salida del convertidor. La serie calculada es validada mediante programación de la Serie de Fourier con MATLAB para diversos ángulos de disparo en los tiristores. Finalmente, se presentan los resultados obtenidos en forma experimental, empleando un medidor de armónicas comercial. El comportamiento observado en la simulación, así como en el circuito real, muestra que los resultados obtenidos analíticamente cumplen con la representación de la forma de onda del convertidor con un margen de error aceptable. El ejercicio realizado tiene una finalidad didáctica y es evaluar la posibilidad de incorporar el tema en alguna asignatura relacionada

con Electrónica de Potencia en las carreras de ingeniería que se imparten en la UAM-Azcapotzalco.

Palabras claves: Serie de Fourier, Contenido Armónico, Control por Fase, Simulación con Matlab.

1. Introducción

El contenido armónico es un parámetro que, por las afectaciones que puede ocasionar, se ha estudiado en distintas ramas de la ingeniería. En [1], los autores realizan el análisis armónico de los problemas térmicos que se tienen en la transmisión de la energía eléctrica a alto voltaje. En [2] se presenta el empleo de las diferentes armónicas de la Serie de Fourier para describir el comportamiento calorimétrico de un sistema térmico modulado. Mientras que en [3] se exponen las desventajas que genera el contenido armónico en la red eléctrica.

En el área de Electrónica de Potencia, el análisis del contenido armónico es de gran importancia ya que permite determinar la calidad de la energía en la red eléctrica [3]. Uno de los convertidores de CA/CA más empleado, es el que basa su operación en la técnica de Control por Fase [4, 5, 6]. Sin embargo su funcionamiento genera un alto contenido armónico el cual está en función del ángulo de disparo del tiristor. Lo anterior debido a que la señal de salida deja de ser puramente senoidal para tomar la forma de una senoidal recortada.

En [6], se presenta el cálculo de los coeficientes de Fourier para la forma de onda de salida del convertidor considerado, pero únicamente para el caso particular cuando $T=2\pi$. En el trabajo que aquí se presenta, el cálculo se realiza en términos del período T y del instante de disparo k, lo que hace que sea más general y se pueda aplicar para cualquier frecuencia de salida.

Existen otras técnicas para implementar este tipo de convertidores, en [9, 10] se presenta un método basado en PWM de alta frecuencia, con esta técnica se consigue que las componentes armónicas de la serie de Fourier se tengan en altas frecuencias, lo que facilita el diseño de los

filtros. Aunque tiene la desventaja de que la señal debe pasar por varias etapas de semiconductores antes de llegar a la carga, lo que reduce la eficiencia del sistema.

En la Fig.1 se representa la forma de onda típica, a la entrada de un convertidor CA/CA así como la que corresponde a la salida, para un ángulo de disparo de 90°.



Fig. 1. Forma de onda en un control por fase.

La forma de onda de la salida del convertidor tiene, en un período, las siguientes características:

- 1) Un número finito de discontinuidades,
- 2) Un número finito de máximos y mínimos, y
- 3) Es integrable.

Estas características se conocen como las Condiciones de Dirichlet [7]. Cualquier forma de onda que cumpla con estas condiciones puede ser representada mediante una Serie de Fourier.

La Serie de Fourier en su forma trigonométrica se muestra en la ecuación (1).

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$
(1)

con:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$
$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$
$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

Siendo (a_0 , a_n , b_n), los coeficientes de Fourier y $n \in \mathbb{N}^*$ (conjunto de enteros positivos). Estos términos representan el aporte energético necesario para construir la forma de onda de salida. Así mismo, cada par (a_n , b_n) combinado, indica la componente armónica de orden n, que se genera en el convertidor y que distorsiona la forma de onda de la red eléctrica.

La presentación del trabajo realizado se expone de la siguiente manera. En la sección dos del artículo se muestra el desarrollo matemático que permite obtener los coeficientes de la Serie de Fourier para la señal de salida del convertidor bajo estudio. Posteriormente, se muestra la forma en que el programa de simulación de la serie calculada se implementó en Matlab, así como los resultados obtenidos. En la sección cuatro del trabajo, se muestra el circuito electrónico elaborado sobre el cual se realizó una serie de experimentos para comparar con los resultados obtenidos de la simulación. Se presentan las formas de onda, así como los valores de las componentes armónicas de la señal de salida. Finalmente, en las dos últimas secciones del documento, se discuten los resultados y se presentan las conclusiones del trabajo.

2. Cálculo de la Serie de Fourier

La expresión matemática que describe el comportamiento de la forma de onda, de período T y tiempo de disparo k, que se tiene a la salida del convertidor bajo estudio está dada por (2):

$$f(t) = \begin{cases} A \sin(\omega_0 t), & Si \left(k < t \le \frac{T}{2}\right) \delta\left(\frac{T}{2} + k < t \le T\right) \\ 0, & En \ otro \ caso \end{cases}$$
(2)

Con frecuencia fundamental $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

A partir de esta expresión se procede a determinar el valor de los coeficientes de Fourier (a_0 , a_n , b_n).

2.1. Coeficiente *a*₀

Sustituyendo la expresión de f(t), en la ecuación de a_{θ} , tenemos:

$$a_0 = \frac{1}{T} \left[\int_k^{\frac{T}{2}} A \sin(\omega_0 t) dt + \int_{\frac{T}{2}+k}^{T} A \sin(\omega_0 t) dt \right]$$

Recordando que: $\int_{a}^{b} A \sin(\omega_{0}t) dt = \frac{-A}{\omega_{0}} \cos(\omega_{0}t) |_{a}^{b}$, expresando la frecuencia en términos del período: $\omega_{0} = \frac{2\pi}{T}$ y aplicando identidades trigonométricas se obtiene:

$$a_0 = \frac{-A}{2\pi} \left[-\cos\left(\frac{2\pi}{T}k\right) - \left\{ -\cos\left(\frac{2\pi}{T}k\right) \right\} \right] = 0$$

Este resultado indica que el valor medio de la señal de salida es igual a cero, lo cual es de esperarse dado que la forma de onda es simétrica.

2.2. Coeficiente a_n

Para calcular el coeficiente a_n se procede de forma similar que para el primer término; se remplaza la expresión de f(t), en la ecuación de a_n , obteniendo:

$$a_{n} = \frac{2}{T} \left[\int_{k}^{\frac{1}{2}} A \sin(\omega_{0}t) \cos(nw_{0}t) dt + \int_{\frac{T}{2}+k}^{T} A \sin(w_{0}t) \cos(n\omega_{0}t) dt \right]$$

Empleando identidades trigonométricas y expresando la frecuencia en términos del período, se puede simplificar la expresión hasta obtener:

$$a_n = \frac{-A}{2\pi} \left\{ \left[1 - (-1)^n \right] \left[\frac{1 - \cos\left(2\pi \frac{k}{T} \left[1 + n \right] \right)}{1 + n} + \frac{1 - \cos\left(2\pi \frac{k}{T} \left[1 - n \right] \right)}{1 - n} \right] \right\}$$
(3)

En la ecuación (3) se puede observar que el valor que adopte el término $[1 - (-1)^n]$, depende del hecho que *n* sea par (*n_p*) o impar (*n_i*).

• **Caso**: *n*_{*p*}

Para el caso de coeficientes pares, tenemos $n_p = 2r$, con $r \in \mathbb{N}^*$. Remplazando en el primer término de la ecuación (3), se encuentra que: $[1 - (-1)^{2r}] = 0$, por lo tanto tenemos que: $a_{n_p} =$ 0. Este resultado implica que las componentes armónicas correspondientes a estos coeficientes en la señal de salida del convertidor tienen un valor nulo.

• **Caso:** *n*_{*i*}

En el caso de coeficientes impares, tenemos $n_i = 2r - 1$, con $r \in \mathbb{N}^*$. Remplazando en el primer término de la ecuación (3), se encuentra que: $[1 - (-1)^{2r-1}] = 2$.

Considerando el resultado anterior, se obtiene la expresión para el coeficiente a_{n_i} .

$$a_{n_i} = \frac{A}{\pi} \left[\frac{\cos\left(2\pi \frac{k}{T} [1+n_i]\right) - 1}{1+n_i} + \frac{\cos\left(2\pi \frac{k}{T} [1-n_i]\right) - 1}{1-n_i} \right]$$
(4)

Se observa que para el caso específico donde $n_i = 1$, se tiene una indeterminación, por lo que la ecuación (4) es válida solo para $n_i > 1$.

La expresión correspondiente al término a_1 se puede determinar calculando el límite de (4) cuando $n_i \rightarrow 1$.

$$a_1 = \frac{A}{\pi} \left[\frac{\cos\left(4\pi \frac{k}{T}\right) - 1}{2} \right]$$
(5)

2.3. Coeficiente b_n

Para obtener este conjunto de coeficientes se procede de manera similar que para los términos anteriores. Sustituyendo el valor de f(t), en la ecuación de b_n , se tiene:

$$b_n = \frac{2}{T} \left[\int_k^{\frac{T}{2}} A\sin(\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt + \int_{\frac{T}{2}+k}^{T} A\sin(\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt \right]$$

Empleando identidades trigonométricas y expresando la frecuencia en términos del período, se puede simplificar la expresión hasta obtener:

$$b_n = \frac{A}{2\pi} \left\{ \left[(-1)^n - 1 \right] \left[\frac{\sin\left(2\pi \frac{k}{T} [1+n]\right)}{1+n} - \frac{\sin\left(2\pi \frac{k}{T} [1-n]\right)}{1-n} \right] \right\}$$
(6)

En la ecuación (6) se puede observar que el valor que tome el término $[(-1)^n - 1]$, depende del hecho que *n* sea par (*n_p*) o impar (*n_i*).

• Caso: n_p

Para el caso de coeficientes pares se encuentra que: $[(-1)^{n_p} - 1] = 0$, por lo que: $b_{n_p} = 0$. Se llega a la misma conclusión que para los términos a_{n_p} , las componentes armónicas correspondientes a estos coeficientes en la señal de salida del convertidor tienen un valor nulo.

• Caso: *n*_i

En el caso de coeficientes impares se encuentra que: $[(-1)^{n_i} - 1] = -2$, lo cual implica que:

$$b_{n_i} = \frac{A}{\pi} \left[\frac{\sin\left(2\pi \frac{k}{T} [1 - n_i]\right)}{1 - n_i} - \frac{\sin\left(2\pi \frac{k}{T} [1 + n_i]\right)}{1 + n_i} \right]$$
(7)

Nuevamente, se observa que para el caso específico $n_i = 1$, se tiene una indeterminación, por lo que la ecuación (7) es válida solo para $n_i > 1$.

La expresión correspondiente al término b_1 se puede determinar calculando el límite de (7) cuando $n_i \rightarrow 1$.

$$b_1 = \frac{A}{\pi} \left[2\pi \frac{k}{T} - \frac{\sin\left(4\pi \frac{k}{T}\right)}{2} \right] \tag{8}$$

A continuación se muestra el resumen de los coeficientes encontrados.



Tabla 1. Expresiones matemáticas de los coeficientes de Fourier.

Entonces la Serie de Fourier para la forma de onda de un Control Por Fase está dada por:

$$f(t) = a_1 \cos(\omega_0 t) + b_1 \sin(\omega_0 t) + \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

Las expresiones trigonométricas de misma frecuencia pueden agruparse en una sola, lo que permite reescribir la Serie de Fourier como:

$$f(t) = c_1 \sin(\omega_0 t + \theta_1) + \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} c_n \sin(n\omega_0 t + \theta_n)$$
(9)

Con:

$$c_n = \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2}$$
(10)

$$\theta_n = \tan^{-1} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) \tag{11}$$

Lo anterior es válido para $n = 3, 5, 7 \dots$

Cabe señalar que para tener una mejor representación de la forma de onda, es necesario que en la sumatoria de la Serie de Fourier se tenga un número elevado de términos.

3. Simulación en Matlab

Con la finalidad de validar los resultados obtenidos analíticamente, se elaboró un programa en Matlab en el cual se implementó el resultado de la sección anterior. Los parámetros que el programa desarrollado requiere son: el valor de la amplitud de la señal de entrada, el ángulo de disparo para el convertidor y el número de armónicas que se desean evaluar. Los resultados que proporciona son: la gráfica de la señal de salida, así como los valores del contenido armónico de la misma, el diagrama de flujo del programa se muestra en la Fig. 2.



Fig. 2. Diagrama de flujo del programa.

Simulación con diferentes números de armónicas

Como primer paso, y con el fin de evaluar el correcto funcionamiento del programa, se ejecutó este manteniendo fijo el valor de la amplitud en 170, así como el ángulo de disparo en 90°.

Se realizaron pruebas para n = 3, 5, 10 y 15, los resultados se muestran en las gráficas 3a a 3d respectivamente.

Puede observarse que el resultado coincide con lo esperado: a mayor número de coeficientes de Fourier, la representación de la señal es más precisa.



Fig. 3. Representación de la señal a diferentes valores de n.

Simulación con diferentes ángulos de disparo

Como siguiente paso, se realizaron una serie de simulaciones a distintos valores de ángulo de disparo, manteniendo fija la amplitud en 170, la frecuencia en 60 Hz y para un número de armónicas n = 1000, aunque sólo se grafican las primeras siete.

Para la primera ejecución del programa se selecciona un ángulo de disparo de 0°, se tiene la salida sin recorte alguno, es decir la salida del convertidor es puramente senoidal y sólo existe la componente fundamental de 60Hz y cuyo valor RMS es de 120.2, lo que establece que la forma de onda no contiene ningún armónico, se tiene el caso ideal, Fig. 4.



Fig. 4. Señal con k = 0°.

En la segunda simulación, se seleccionó un ángulo de disparo de 45°, lo que implica la aparición de armónicas en la señal de salida. La fig. 5 muestra la señal obtenida, así como las armónicas que se generan en las frecuencias impares múltiplos de 60Hz. Nótese que el valor RMS del primer armónico, n=3, es apenas equivalente al 20% del valor de la fundamental.



Fig. 5. Señal con k = 45°.

La tercera simulación correspondió a un ángulo de disparo de 90°. Se puede observar en la Fig. 6 que en este caso el valor RMS del primer armónico tiene una magnitud que rebasa el 50% del valor de la fundamental.



Fig. 6. Señal con $k = 90^{\circ}$.

La última simulación que se presenta, corresponde a un ángulo de disparo de 135°, Fig. 7. Como es de esperarse, el contenido armónico se incrementa al grado de existir una diferencia de sólo un 10% entre el valor RMS de la fundamental y el del primer armónico.



Fig. 7. Señal con k = 135°.

Se comprueba, a partir de las simulaciones anteriores, que para construir una señal que está muy alejada de una senoidal, se requiere de un mayor contenido armónico. Lo anterior implica, en la práctica, deformar la forma de onda de la corriente en la red eléctrica.

4. Mediciones experimentales

En esta sección se muestran los resultados obtenidos, esta vez en forma experimental. Para esto se construyó el circuito cuyo diagrama se muestra en la Fig. 8.



Fig. 8. Convertidor CA/CA construido.

La base del sistema es un microcontrolador que recibe la señal generada por un potenciómetro la cual permite establecer el valor del ángulo de disparo deseado. Por otro lado se tiene una señal de interrupción generada por un circuito detector de cruce por cero de la línea eléctrica. Al atender la interrupción, el microcontrolador apaga el Triac de la etapa de potencia y lo mantiene en ese estado durante un intervalo de tiempo determinado por el voltaje del potenciómetro. Transcurrido este tiempo se enciende el elemento hasta que otra señal de interrupción se presenta. Se ajustó la operación del circuito para que el ángulo de disparo coincidiera con los de las cuatro simulaciones realizadas en la sección anterior. Por medio de

un osciloscopio se observó la forma de onda de salida del convertidor y con un analizador se determinó el comportamiento armónico de la misma.

Como puede observarse en el diagrama, la señal de entrada al sistema es la que proviene de la línea de alimentación eléctrica comercial. Los parámetros de esta señal, comprobados mediante medición directa, fueron: amplitud 170V y frecuencia de 60Hz.

Los resultados experimentales obtenidos para los cuatro ángulos de disparo considerados: 0°, 45°, 90° y 135°, se muestran en las Fig. 9 a 12.



Fig. 9. Control por Fase con k=0°.







Fig. 11. Control por Fase con k=90°.



Fig. 12. Control por Fase con k=135°.

5. Discusión

Los resultados de la simulación realizada muestran formas de onda similares a las que se esperan como salida de un convertidor de CA/CA basado en la técnica de Control por Fase. Asimismo, se comprueba en las simulaciones que el incremento en el número de coeficientes de la Serie de Fourier permite obtener una señal más cercana a la real.

La tabla 2 muestra, en forma resumida, los resultados obtenidos, tanto mediante simulación como en forma experimental, respecto al comportamiento armónico a la salida del convertidor. Se muestran los datos para las cinco primeras armónicas impares y para cada uno de los cuatro distintos ángulos de disparo considerados en el estudio.

n	Valor para k = 0°			Valor para k = 45°			Valor para k = 90°			Valor para k = 135°		
	MATLAB	Medido	%E	MATLAB	Medido	%E	MATLAB	Medido	%E	MATLAB	Medido	%E
1	120.2	122.3	1.74	110.9	114.2	2.97	71.2	71.6	0.56	22.0	19.5	11.36
3	0	0	0	19.1	16.0	16.23	38.2	40.1	4.97	19.1	17.1	10.47
5	0	0	0	14.2	14.0	1.40	12.7	13.6	7.08	14.2	13.4	5.63
7	0	0	0	5.4	5.5	1.85	12.7	12.6	0.78	9.0	9.0	0
9	0	0	0	4.5	5.0	11.11	7.6	6.9	9.21	5.4	5.5	1.85

Tabla 2. Resultados obtenidos.

Los resultados que se muestran permiten concluir que los coeficientes de Fourier obtenidos analíticamente representan la forma de onda de salida de un convertidor de CA/CA que emplea la técnica de Control por Fase de manera bastante precisa. A nivel de los resultados experimentales existen errores relativamente grandes los cuales pueden explicarse debido al carácter variable de la señal de entrada, línea de alimentación comercial, así como a los errores de apreciación al momento de ajustar el instante de disparo en el convertidor.

6. Conclusiones

La Serie de Fourier permite determinar el contenido armónico que se presenta cuando se realiza alguna manipulación a la red eléctrica. Sin este análisis la única forma posible de determinar la calidad de la línea sería mediante medición directa. Con un objetivo académico se realizó el trabajo que aquí se presenta, esto con la idea de explorar la posibilidad de incluir este análisis en el programa de estudios de la asignatura Electrónica de Potencia.

Se buscó conocer la profundidad de los conocimientos matemáticos necesarios para el cálculo de los coeficientes, y si estos se encuentran dentro del marco de habilidades de los estudiantes de las licenciaturas en Ingeniería que cursan la materia.

A nivel de trabajo de simulación y experimental, se observó que los conocimientos y habilidades que se requieren se encuentran dentro de los que los estudiantes manejan. Se considera que se requiere un reforzamiento previo de los conocimientos respecto al análisis frecuencial basado en la Serie de Fourier.

El trabajo presentado es uno de varios pasos que se están dando con el fin de reforzar los cursos asociados al área de Electrónica de Potencia en la Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco. A futuro se pretenden realizar ejercicios similares para otros tipos de convertidores.

7. Referencias

- [1] B. Wiecek, G. De Mey, V. Chatziathanasiou, A.Papagiannakis, I.Theodosoglou, "Harmonic Analysis of Dynamic Thermal Problems InHigh Voltage Overhead Transmission Lines and Buried Cables". Electrical Power and Energy Systems. Vol. 58. Año 2014. Págs.199-205.
- [2] R. Androsch, B. Wunderlich, "Temperature-Modulated DSC Using Higher Harmonics of the Fourier Transform". Thermochimica Acta. Vol. 33. Año 1999. Págs.27-32.
- [3] R. K. Sugandhi, K. K. Sugandhi, Tiristores Conceptos y Aplicaciones. 1ra Reimpresión. 1990. LIMUSA. México.
- [4] D. W. Hart, Electrónica de Potencia. 1ra Edición. 2001. Pearson Educación S.A. Madrid.472 Pags.
- [5] M. H. Rashid, Electrónica de Potencia Circuitos, Dispositivos y Aplicaciones. 3ra Edición.Pearson Educación.
- [6] E. Ballester, R. Piqué, Electrónica de Potencia Principios Fundamentales y Estructuras Básicas. 1ra Edición. 2012. Alfaomega. México. 676 Pags.
- [7] H. P. Hsu, Análisis de Fourier. 1ra Reimpresión. 1998. Prentice Hall. México.
- [8] Thomas, Cálculo de una Variable. 11a Edición. 2006. Pearson Educación. México. 824 Pags.
- [9] K.A. Nigim, G.T. Heydt b, "Power Quality Improvement Using Integral-PWM Control in an AC/AC Voltage Converter". Electric Power Systems Research.Vol. 63.Año 2002.Págs.65-71.
- [10] N. A. Ahmed, F. Q. El Enezi, A.K. Al-Othman, "Comprehensive Analysis and Transient Modeling of Symmetrical Single Phase PWM AC–AC Voltage Converters". Electric Power Systems Research. Vol. 81. Año 2011. Págs. 57–65.

8. Autores

Ing. Enrique Arévalo Zamudio, es egresado de la carrera en Ingeniería Electrónica de la UAM-Azcapotzalco. Actualmente es ayudante en el área de investigación de Control de Procesos adscrito al Departamento de Electrónica de la UAM-Azcapotzalco.

M. en C. Roberto A. Alcántara Ramírez Ingeniero en Electrónica, por la Universidad Autónoma Metropolitana, unidad Azcapotzalco. Maestro en Ciencias en Ingeniería Mecatrónica por el T.E.S.E. Desde 1987 se desempeña como Profesor Investigador de tiempo completo en el departamento de Electrónica de la UAM-Azcapotzalco, donde desarrolla trabajos de Investigación en las áreas de Electrónica de Potencia y Control de Procesos.

Dr. Miguel Magos Rivera es Ingeniero en Electrónica por la Universidad Autónoma Metropolitana, Maestro y Doctor en Automatización Industrial por la Universidad Claude Bernard de Lyon, Francia. Actualmente es profesor-investigador en la Universidad Autónoma Metropolitana unidad Azcapotzalco.