

Obtención y Análisis del Modelo Dinámico del Sistema de Levitación Magnética: Anillo de Thomson

José Jiménez González

Universidad Autónoma Metropolitana, Azcapotzalco, Departamento de Energía
Av. San Pablo No. 180. C.P. 02200, México. D.F., MEXICO.
e-mail: joseph31_ja@hotmail.com

Felipe González Montañez

Universidad Autónoma Metropolitana, Azcapotzalco, Departamento de Energía
Av. San Pablo No. 180. C.P. 02200, México. D.F., MEXICO.
felipegonzalezmon@gmail.com

Víctor M. Jiménez Mondragón

Universidad Autónoma Metropolitana, Azcapotzalco, Departamento de Energía
Av. San Pablo No. 180. C.P. 02200, México. D.F., MEXICO.
jolivaresgalvan@gmail.com

Juan C. Olivares Galván

On sabbatical leave at the Department of Electrical and Computer Engineering,
University of Alberta, Edmonton, Alberta, T6G 2R3, Canada
jolivare@ualberta.ca

Resumen

En este trabajo se muestra el desarrollo y análisis del modelo dinámico del Anillo de Thomson, esto se realiza tomando en consideración el impacto del cambio de la posición del anillo en los parámetros eléctricos y magnéticos. Se utiliza el método de elemento finito para determinar el campo magnético y se realiza la estimación algunos parámetros,

se simula el sistema de levitación magnética a diferentes niveles de excitación para analizar el comportamiento de la posición del anillo y se validan los resultados con experimentos, demostrando que se puede modelar el sistema completo sin necesidad de hacer las suposiciones clásicas que simplifican el análisis. El objetivo de realizar un modelo dinámico relativamente más completo es el de poder diseñar mejores estrategias de control para las diferentes aplicaciones que se le puede dar en los sistemas que funcionan con levitación magnética.

Palabras Claves: Modelado, Circuitos, Control, Anillo-Thomson, Magnetismo, Inductancias.

1. Introducción

El Anillo de Thomson ha sido utilizado como un experimento ilustrativo del fenómeno de fuerzas e inducción electromagnética, y se ha buscado desde hace algunas décadas controlarlo de manera eficiente por distintos métodos. Sin embargo, la metodología utilizada hasta ahora hace hincapié en el comportamiento en estado estable del anillo.

Se sabe que la corriente que circulará por el anillo i_2 será función de la que circula por la bobina i_1 , de la misma manera la fuerza magnética presente en el anillo será función de la corriente que circula por él. Más que sólo repulsión magnética, se acepta la teoría que dice que la fuerza de levitación depende del ángulo de fase entre las corrientes y los flujos [1-3].

El modelado de este sistema se ha realizado tomando como consideración las ecuaciones dinámicas que modelan la parte eléctrica del sistema, sin embargo, se ha prestado muy poca atención a la dinámica completa. Es casi evidente que el campo magnético no es uniforme a lo largo de todo el núcleo alrededor del cual flota el anillo y esto tiene repercusión en el valor de autoinductancia del anillo y en la inductancia mutua entre la bobina y el anillo, además de que el análisis de la fuerza electromagnética no contiene una dependencia de la separación entre la bobina y el anillo implícita [4].

Este trabajo tiene como propósito comparar diferentes modelos del Anillo de Thomson y proponer un modelo dinámico que considere de forma más completa el fenómeno

electromecánico. La comparación se realiza utilizando métodos dinámicos, numéricos y experimentales, para el modelo dinámico del anillo se considera el transitorio del sistema, el cual puede no ser despreciado, como se ve en [3].

2. Modelado Dinámico

En esta sección se abordará la metodología utilizada para obtener el modelo dinámico del anillo de Thomson.

2.1 Ecuaciones Dinámicas

Para tener el modelo completo del anillo se deben contemplar la parte eléctrica, que consta de la bobina inductora y de la fuente de tensión, la parte magnética que consta del núcleo ferromagnético, y la parte mecánica, es decir, el movimiento del anillo. El modelo se realiza con el sistema clásico de una bobina enrollada alrededor de un núcleo de hierro de longitud L formado de delgadas varillas dentro de un contenedor de pvc como se muestra en la Fig. 1, el propósito de las varillas es reducir las pérdidas por corrientes de eddy en la bobina [5]. La bobina primaria se hizo de alambre de cobre, por la cual circula la corriente i_1 . Esta corriente produce un flujo Φ , que a su vez, por la ley de inducción de Faraday se induce una corriente i_2 en el anillo. Debido a la presencia del campo magnético producido y a la corriente del anillo se genera una fuerza F_m que hace levitar al anillo. Una imagen de este sistema se muestra en la Fig. 1

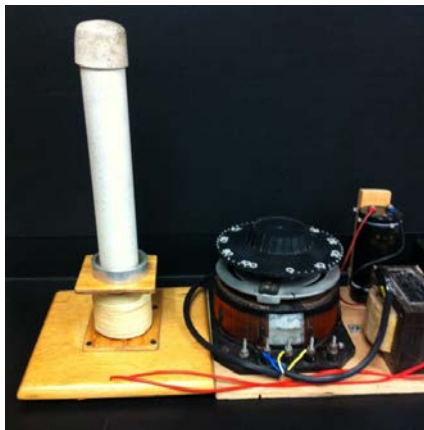


Fig. 1. Esquema del anillo de Thomson.

El análisis se realizó con enfoque en la energía, construyendo el lagrangeano del sistema. Como coordenadas generalizadas se tomaron la corriente i_1 en la bobina, la corriente i_2 y la posición z del anillo. La Ecuación (1) describe el lagrangeano del sistema, tomando en cuenta la energía debida a las inductancias propias L_1 y L_2 de la bobina y del anillo, respectivamente, la inductancia mutua M entre ambas, la energía debida al movimiento del anillo y las energías potenciales tanto de la fuente de voltaje v_1 como la debida a la gravedad.

$$L = \frac{1}{2}(L_1 i_1^2 + L_2 i_2^2 + 2M i_1 i_2 + m \dot{z}^2) - mgz \quad (1)$$

La Ecuación (2) es una función de fuerzas externas, se expresa la fuente de voltaje y la energía disipada, constituida por las resistencias de la bobina R_1 y del anillo R_2 , debido a que son los únicos elementos que disipan energía. La constante β representa el amortiguamiento del sistema, debido a una fricción viscosa en el movimiento del anillo a través del campo y del aire que genera una fuerza proporcional a la velocidad [2].

$$\mathcal{F} = R_1 i_1 + R_2 i_2 + \beta \dot{z} - v_1 \quad (2)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para el sistema quedan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} v_1 &= R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} - i_2 \frac{dM}{dt} \\ 0 &= R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + i_1 \frac{dM}{dt} \\ 0 &= m \frac{d^2 z}{dt^2} + mg + \beta \frac{dz}{dt} - \frac{dM}{dt} i_1 i_2 \end{aligned} \quad (3)$$

En las ecuaciones podemos ver el término dM / dt que se menciona en [6]. Esto se modeló de esa manera debido a que la inductancia entre el anillo y la bobina varía dependiendo de la separación entre ambos y la posición del anillo varía respecto al

tiempo. Estas ecuaciones dejan ver que la dinámica del anillo es no lineal y el sistema está fuertemente acoplado. Si consideramos que $i_2 = f(i_1)$, nos encontramos con la dependencia de la fuerza con el cuadrado de la corriente i_1 .

Asumimos que el anillo tiene un comportamiento inductivo para generar una fuerza promedio repulsiva [2, 3]. Como se puede ver en la tercera Ecuación (3) la fuerza magnética se debe a la variación de la inductancia respecto al tiempo y a las corrientes en la bobina y en el anillo [4]. Los parámetros contenidos en las Ecuaciones (3) se obtuvieron experimentalmente para la bobina, haciendo mediciones de potencia activa y potencia reactiva para obtener la resistencia R_1 y la inductancia L_1 . La resistencia del anillo se obtuvo con la resistividad conocida del aluminio ρ y los parámetros geométricos del anillo $R_2 = \rho L / A$, donde L es el diámetro medio del anillo y A el área de la sección transversal, se despreció el efecto piel debido a que las pruebas se realizaron con la frecuencia de 60 Hz de la línea. La inductancia L_2 se obtuvo con la ecuación para un toroide con la misma sección transversal que el anillo $L_2 = \mu_0 N^2 \left(r_0 - \sqrt{r_0^2 - a^2} \right)$ [7], con N el número de vueltas, en este caso 1, r_0 el radio exterior del toro y a el radio interior.

2.2 Inductancia Mutua

La inductancia mutua se consideró como función de la posición. Para poder conocer la inductancia mutua se hizo una simulación con el método de elemento finito del sistema, de donde se obtuvieron valores para la densidad de flujo magnético radial a diferentes distancias de la bobina, de manera que se pudiera ajustar una función $B_\rho(z)$ a estos valores. La gráfica es muy similar a la obtenida en otros trabajos [5].

Se sabe que la componente radial del campo va a ser la que contribuya a la fuerza en el anillo [3] y además se sabe que la componente vertical es prácticamente despreciable a lo largo del núcleo [8].

Si consideramos el flujo magnético debido a la corriente que circula por la bobina proporcional a la inductancia mutua del sistema, podemos ajustar los resultados

obtenidos de las mediciones para obtener una función para la inductancia en función de la posición, entonces, de la inductancia mutua en función de la posición se puede aproximar con los valores obtenidos de la simulación de campo magnético y corriente en la bobina.

$$M(z) \propto B_r(z) \tag{4}$$

La componente radial del campo magnético está también relacionada con la componente axial, sin embargo, cada componente del flujo total Φ depende de la geometría del sistema, ya que el flujo entra axialmente al cilindro por el área de la sección transversal, y el resto se mueve atravesando el cilindro [5]. Podemos ver entonces que la derivada de la inductancia mutua es proporcional a la velocidad del anillo y a la variación de la inductancia con la distancia.

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dM}{dz} \frac{dz}{dt} \tag{5}$$

En la Fig. 2 se muestra la inductancia obtenida con el método de elemento finito.

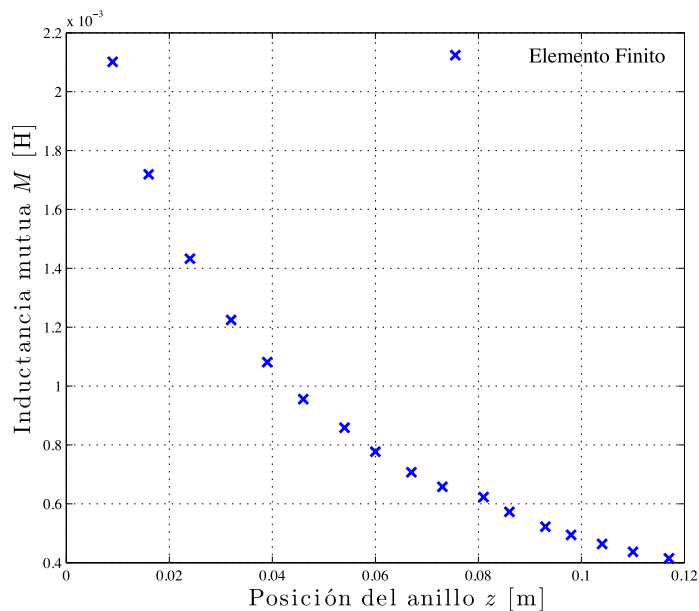


Fig. 2. Inductancia mutua en función de la posición del anillo.

Para simular la inductancia mutua se ajustaron los valores mostrados en la Fig. 2 a una función exponencial mostrada en la Ecuación (6). Las constantes mostradas en la ecuación dependen de la permeabilidad y parámetros geométricos de la distribución del campo magnético de la bobina [9].

La permeabilidad se considera constante para mantener la naturaleza sinusoidal del voltaje y la corriente, y también se supone histéresis despreciable.

$$M(z) = 0.0015e^{-59.21z} + 0.0013e^{-9.697z} \quad (6)$$

3. Simulación

Se simuló el comportamiento del anillo utilizando MATLAB-Simulink, con los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} R_1 &= 80 \Omega \\ l_1 &= 1.2103 \text{ mH} \\ R_2 &= 61.277 \mu\Omega \\ l_2 &= 58.2 \mu\text{H} \\ m &= 0.021 \text{ kg} \\ \beta &= 0.3 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m} \\ v_1 &= 100 \text{ V} \end{aligned}$$

y las siguientes ecuaciones de estado

$$\begin{aligned} \frac{di_1}{dt} &= \frac{1}{l_1} \left(v_1 - R_1 i_1 + M \frac{di_2}{dt} + i_2 v \frac{dM}{dz} \right) \\ \frac{di_2}{dt} &= -\frac{1}{l_2} \left(R_2 i_2 + M \frac{di_1}{dt} + i_1 v \frac{dM}{dz} \right) \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{i_1 i_2}{m} \frac{dM}{dz} v - \frac{\beta}{m} v - g \end{aligned} \quad (7)$$

Donde v es la velocidad del anillo. Se escogió un voltaje de 100 V para validar experimentalmente el modelo. Con el sistema mostrado en la Fig. 1 el anillo se estabilizó en 6.1 cm.

El modelo se simuló durante 2 segundos. Para simular la inductancia mutua, por comodidad se ajustaron los valores mostrados en la Fig. 2 a una función exponencial, únicamente con el propósito de simular las Ecuaciones (7).

Los resultados de la simulación, muestran gran congruencia con el comportamiento real del anillo. La Fig. 3 muestra la corriente que circula por el anillo, que alcanza un valor máximo de 1.77 A, cuyo valor RMS es muy similar con el valor medido durante el experimento. La Fig. 4 muestra cómo se comporta la corriente en el anillo. Esta corriente no se puede medir directamente, sin embargo, en la Fig. 5 se muestra el desfase entre ambas corrientes que es de aproximadamente 180° , generándose por la ley de Lorentz una fuerza repulsiva para cada instante de tiempo, como se ha visto con anterioridad [3, 8].

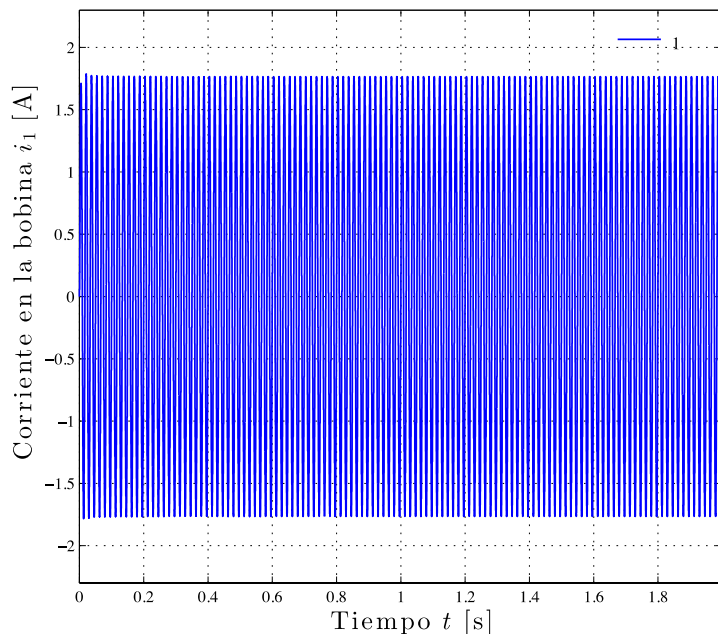


Fig. 3. Corriente en la bobina.

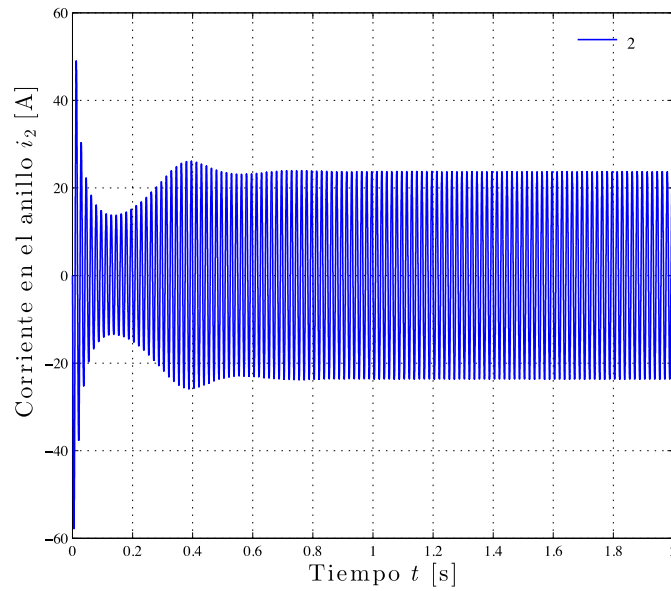


Fig. 4. Corriente en el anillo.

La simulación nos muestra que la fuerza debida al producto de las corrientes alcanza su máximo valor al inicio de la prueba, en el periodo transitorio. Cuando el anillo se estabiliza, la fuerza a pesar de seguir oscilando se mantiene en un rango de valores prácticamente constante, como se puede apreciar en la Fig. 6.

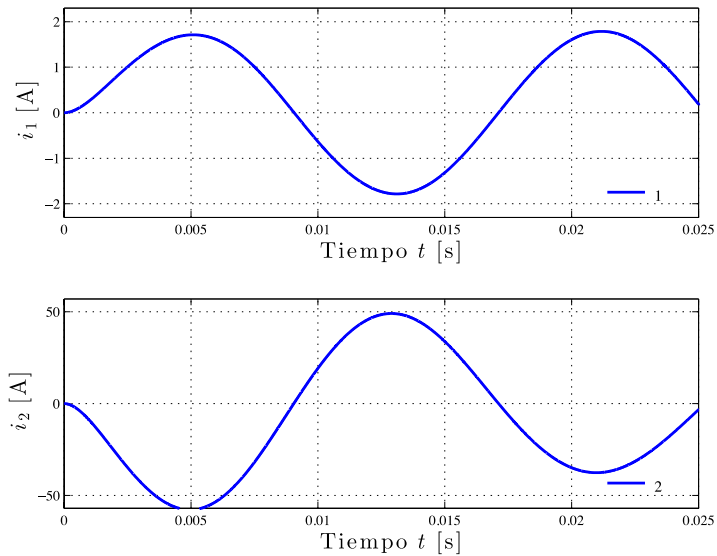


Fig. 5. Desfasamiento entre las corrientes de la bobina y del anillo.

El valor promedio de la fuerza, para el periodo estable, es de $\bar{F}_m = 0.2134$ N. El peso del anillo es 0.206 N, por lo que este *flota* unos centímetros por encima de la bobina.

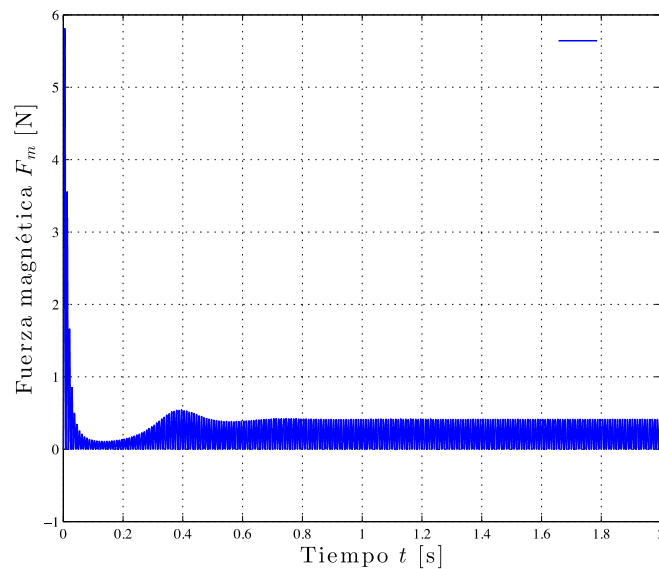


Fig. 6. Magnitud de la fuerza electromagnética.

En la Fig. 7 se muestra la inductancia mutua obtenida de la simulación comparada con la inductancia mostrada en la Fig. 2. Se puede apreciar que los valores simulados son muy aproximados a los que se esperaban.

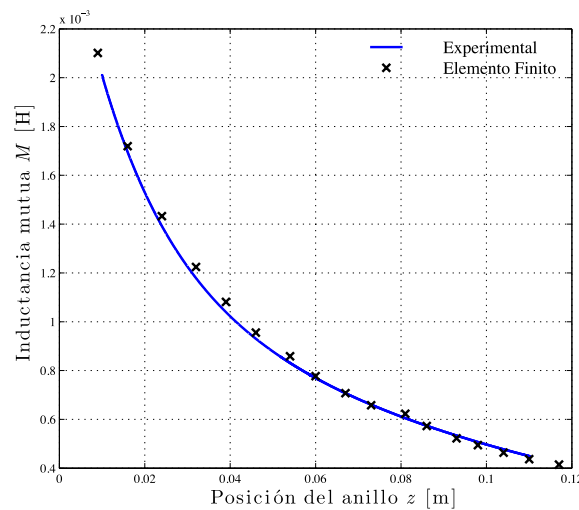


Fig. 7. Inductancia mutua en función de la posición del anillo.

Utilizando el método de elementos finitos se encontró la relación entre la altura a la que el anillo *flota* en estado estable y el voltaje aplicado. Se simuló el comportamiento del anillo a diferentes voltajes desde 45 V a 200 V. Los resultados obtenidos se muestran en la Fig. 8.

En la Fig. 8 podemos ver que a 100 V se alcanza un valor en estado estable de 0.059 m, lo que concuerda con el valor de 6.1 cm que se logró experimentalmente.

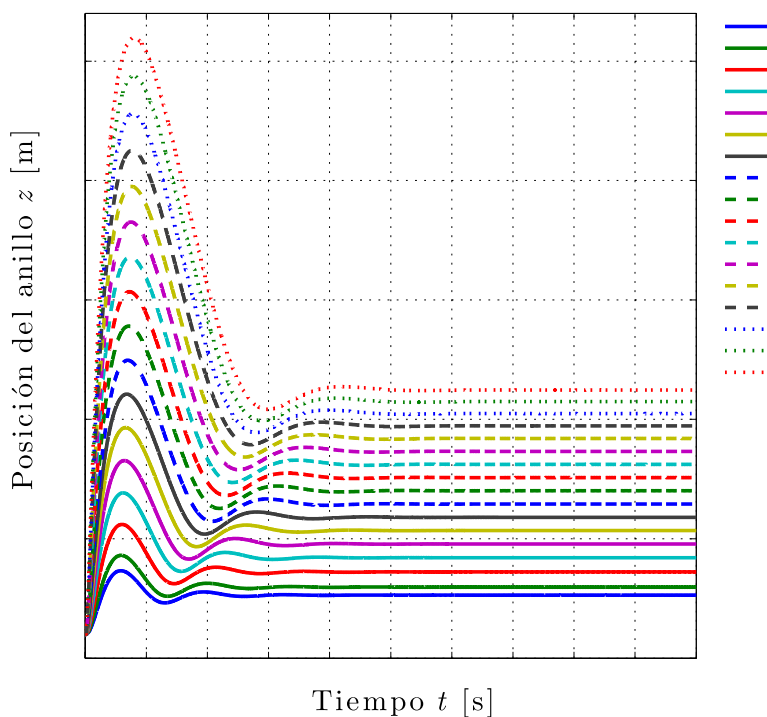


Fig. 8. Comportamiento del anillo a distintos voltajes.

Se realizaron pruebas con el anillo aplicando los mismos voltajes y se compararon con los resultados obtenidos de la simulación y con el método de elemento finito. Los resultados se muestran en la Fig. 9.

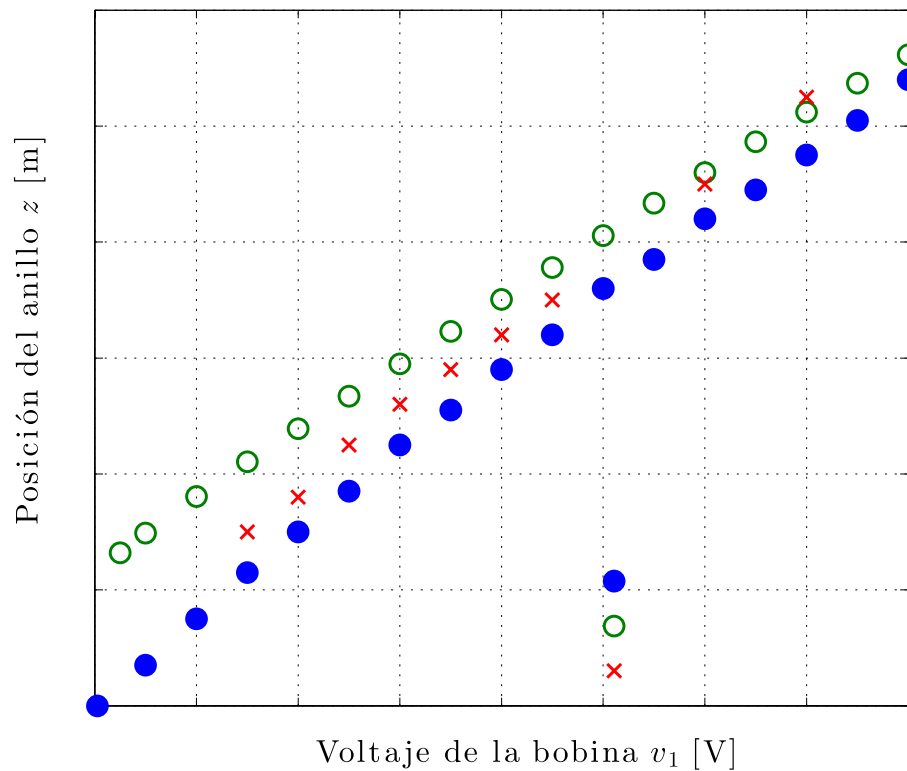


Fig. 9. Posición del anillo a distintos voltajes.

4. Conclusiones

En este trabajo analizo y se obtuvo un modelo dinámico del Anillo de Thomson considerando a la inductancia mutua del sistema como una función de la separación entre el anillo y la bobina. Se realizó un ajuste muy preciso a la función de la inductancia mutua con funciones exponenciales. Se pudo observar que los resultados de la simulación son congruentes con la dinámica real del anillo y con los resultados experimentales obtenidos, por lo que se muestra que no es necesario suponer una inductancia mutua del sistema constante ya que el modelo responde de acuerdo a como lo hace el sistema. La importancia de obtener un modelo más completo es diseñar estrategias de control que utilicen esta información para tener desempeños más eficientes.

5. Referencias

- [1] Mak, S.Y., Floating metal ring in an alternating magnetic field. *American Journal of Physics*, 1986. 54(9): p. 808.
- [2] Sumner, D.J. and A.K. Thakkrar, 'Experiments with a 'jumping ring' apparatus. *Physics Education*, 1972.
- [3] Tjossem, P.J.H. and V. Cornejo, Measurements and mechanisms of Thomson's jumping ring. *American Journal of Physics*, 2000. 68(3): p. 238-244.
- [4] Barry, N. and R. Casey, Elihu Thomson's jumping ring in a levitated closed-loop control experiment., *IEEE Transactions on Education*, 1999. 42(1): p. 72-80.
- [5] Schneider, C.S., A classroom jumping ring. *American Journal of Physics*, 1998. 66(8): p. 686.
- [6] Saslow, W.M., Electromechanical implications of Faraday's law: A problem collection. *American Journal of Physics*, 1987. 55(11): p. 986.
- [7] Sadiku, M.N.O., *Elements of Electromagnetics*. 2010: Oxford University Press, Incorporated.
- [8] Jeffery, R.N. and F. Amiri, The Phase Shift in the Jumping Ring. *The Physics Teacher*, 2008. 46(6): p. 350.
- [9] Hall, J., Forces on the jumping ring. *The Physics Teacher*, 1997. 35(2): p. 80.

6. Autores

José Jiménez González Auxiliar de Investigación y estudiante de Ingeniería Eléctrica en la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco.

Felipe González Montañez En 2011 obtuvo su título de Maestro en Ciencias en Ingeniería Eléctrica con especialidad en Mecatrónica en el CINVESTAV unidad Zacatenco.

Actualmente es profesor investigador del Área de Ingeniería Energética y Electromagnética en el Departamento de Energía de la UAM-A.

Juan C. Olivares Galván En 2003 obtuvo su título de Doctor en Ingeniería Eléctrica en el CINVESTAV unidad Guadalajara. Es profesor investigador del Área de Ingeniería Energética y Electromagnética en el Departamento de Energía de la UAM-A y Actualmente se encuentra en periodo sabático en la Universidad de Alberta, Edmonton, Canadá.

Víctor M. Jiménez Mondragón En 2012 obtuvo su título de Maestro en Ingeniería Eléctrica en la Universidad Nacional Autónoma de México. Actualmente es profesor investigador del Área de Ingeniería Energética y Electromagnética en el Departamento de Energía de la UAM-A.