

# Aplicaciones de un Circuito Electrónico No Lineal

## ***Dr. Cuauhtémoc Guerrero Tejada***

Universidad Autónoma de la Ciudad de México UACM, *Calle Prolongación San Isidro No. 151, Col. San Lorenzo Tezonco, Del. Iztapalapa, México, D.F., C.P. 09790. Tel. 58 50 19 01 Ext. 13163.*  
*cuauhtemoc.guerrero@uacm.edu.mx*

## ***Dr. Gustavo Montemayor García***

Universidad Autónoma de la Ciudad de México UACM, *Calle Prolongación San Isidro No. 151, Col. San Lorenzo Tezonco, Del. Iztapalapa, México, D.F., C.P. 09790. Tel. 58 50 19 01 Ext. 13163.*  
*gustavo.montemayor@uacm.edu.mx*

## ***Enok Mitl Hernández Hernández***

Universidad Autónoma de la Ciudad de México UACM, *Calle Prolongación San Isidro No. 151, Col. San Lorenzo Tezonco, Del. Iztapalapa, México, D.F., C.P. 09790. Tel. 58 50 19 01 Ext. 13163.*  
*enok.hernandez@estudiante.uacm.edu.mx*

## **Resumen**

En el presente trabajo se aborda la implementación en forma experimental el Circuito de Chua el cual es un sistema no-lineal con posibilidad de comportamiento caótico que exhibe una gran variedad de bifurcaciones así como ciclos límites los cuales son de gran interés tanto para el área circuitos eléctricos y como para el área de control automático. Primero se abordó la implementación de un circuito RLC No Lineal con la intención de obtener en forma experimental comportamientos propios del área de Sistemas No Lineales. Asimismo, se implementó en forma experimental una aplicación de este tipo de sistema.

**Palabras Claves:** Circuito de Chua, sistemas no-lineales, retrato de fase.

## **1. Introducción**

En ingeniería electrónica existen varios sistemas con características no lineales, los cuales han sido estudiados exhaustivamente de forma teórica. En un inicio el estudio permaneció en el campo teórico, pero el desarrollo en la fabricación de dispositivos electrónicos ha permitido implementar de forma experimental algunos de estos sistemas electrónicos no lineales y comprobar experimentalmente lo desarrollado en la teoría. En la actualidad, uno de los sistemas no lineales más sencillos de implementar físicamente es el circuito electrónico conocido como Circuito de Chua, introducido en 1983 por el profesor Leon Ong Chua de la Universidad de Waseda, Japón. Este circuito, aunque no es más que un simple oscilador de muy pocos elementos, puede producir una gran variedad de bifurcaciones y ciclos límites. El Circuito de Chua [1] está formado por una parte lineal que consta de tres elementos almacenadores de energía: un inductor y dos capacitores y de un resistor variable. Además contiene una parte no lineal formada por una configuración de un amplificador operacional que opera como una resistencia no lineal. Al circuito original de Chua [2] se le han hecho dos modificaciones, en la primera, para obtener tanto los ciclos límites como las bifurcaciones, se agregaron dos potenciómetros en serie uno de baja y otro de alta impedancia, y en la segunda, como el sistema oscila de forma autónoma, se agregó una fuente de voltaje en serie con el inductor para alimentar el sistema y con esto incorporar una entrada de control.

Al trabajar y manipular circuitos eléctricos en muchas ocasiones se llega a observar comportamientos que sólo se pueden explicar en términos no lineales, y a pesar de esto, en el estudio de dichos sistemas una regla común es primero linealizar alrededor de un punto de equilibrio y después analizar cómo se establece en [3].

Ha habido muchos reportes de implementación del circuito de Chua, en especial el reportado en [4] en donde en primera instancia se realiza una simulación para después implementarlo en forma experimental. En ese mismo trabajo se mencionan varias aplicaciones del circuito de Chua incluso incorpora la simulación de una posible aplicación. Asimismo, en [5] diseñan y simulan un oscilador caótico de Chua así como un circuito de sincronización y enmascarado de comunicaciones.

Realizando una búsqueda de estrategias de control para el circuito de Chua, se llega a la conclusión que existen muy pocas. Como se mencionó anteriormente esta clase de

circuito es extremadamente sencilla, pero puede desplegar comportamientos no-lineales muy variados y es un sistema físico que puede presentar un comportamiento caótico [3]. En forma genérica, un atractor caótico se puede controlar de dos formas [6]: por retroalimentación y por control anticipativo; prefiriéndose un control retroalimentado por ser más robusto y computacionalmente menos intenso. Dentro de las estrategias retroalimentadas, existen las que se centran en perturbaciones paramétricas dependientes del tiempo y de amplitud pequeña (método de OYG [6] y derivaciones posteriores) y las que se centran en la teoría de control. Dentro de este último grupo, en especial está el reportado en [7] en el cual se propone el diseño de controlador retroalimentado no lineal suave así como una estrategia de retroalimentación dinámica no lineal discontinua. Para el desarrollo de la estrategia de control es necesario suponer que se tienen disponibles para medición los tres estados, es decir, los voltajes de los dos capacitores así como de la corriente del inductor. En dicho trabajo solo se reportan resultados de simulación.

Hay un trabajo interesante desde el punto de vista del área de la teoría de control utilizando un circuito de Chua, este reportado en [8], en donde demuestran que el problema de sincronización de un sistema maestro esclavo con dos sistemas continuos lineales a trazos, puede resolverse como un problema sujeto a un conjunto de desigualdades matriciales lineales. La solución que proponen lo verifican vía simulación utilizando el modelo original del circuito de Chua.

## 2. Desarrollo

Las ecuaciones de estado del circuito de Chua son:

$$C_1 \frac{d}{dt} v_{C1} = \frac{v_{C2} - v_{C1}}{R} - g(v_{C1}) \quad (1)$$

$$C_2 \frac{d}{dt} v_{C2} = \frac{v_{C1} - v_{C2}}{R} + i_L \quad (2)$$

$$L \frac{d}{dt} i_L = -v_{C2} \quad (3)$$

donde  $g(\bullet)$  es una función lineal a trazos definida por:

$$g(v_R) = m_0 v_R + \frac{1}{2} (m_1 - m_0) (|v_R + B_p| - |v_R - B_p|) \quad (4)$$

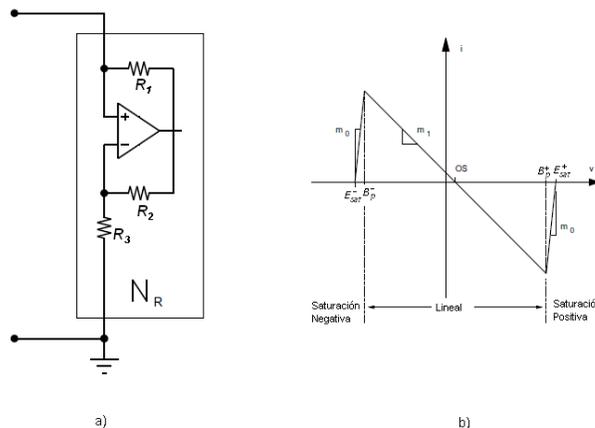
### 2.1. Obtención de una resistencia negativa

Se puede construir una resistencia negativa usando la configuración de un amplificador operacional con tres resistores lineales como se muestra en la Fig 1a. Las características  $v-i$  se pueden observar en la Fig. 1b. Esta relación es lineal a trazos y consiste de tres segmentos. Asumiendo que la ganancia del amplificador es muy grande, la porción

central tiene una pendiente  $m_1 \approx \frac{R_2}{R_1 R_3}$  y la región externa tiene una pendiente  $m_0 \approx \frac{1}{R_1}$ .

Asumiendo que los niveles de saturación del amplificador operacional son iguales en magnitud y el offset  $v_{os}$  es cero se tiene que  $E_{sat}^+ = E_{sat}$  y  $-E_{sat}^- = -E_{sat}$  por lo que los

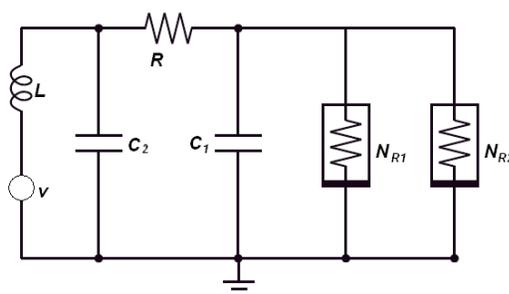
puntos de quiebre ocurren en  $\pm \frac{R_3}{R_2 + R_3} E_{sat}$ .



**Fig. 1. a) Configuración de un Amplificador Operacional para obtener una resistencia negativa; b) características  $v-i$  del resistor negativo.**

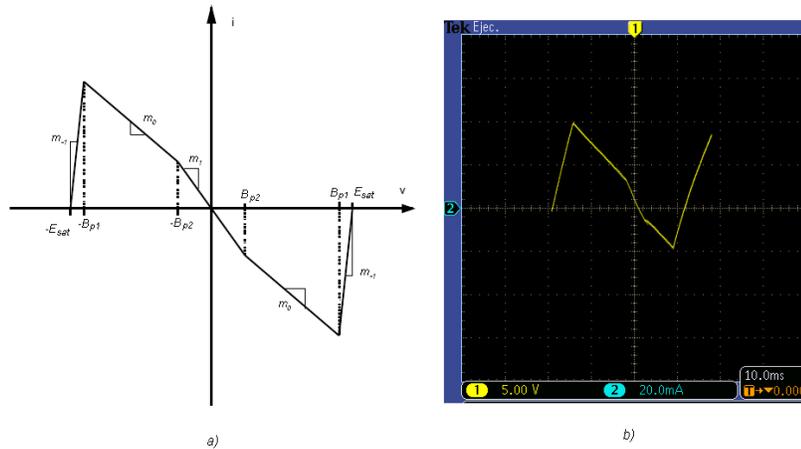
Estas relaciones se muestran gráficamente en la Fig. 1b en donde las pendientes en las regiones internas y externas son  $m_0$  y  $m_1$  respectivamente;  $\pm B_P$  denota los puntos de quiebre. Los resistores no lineales  $N_R$  son llamados de voltaje controlado debido a que la corriente en el elemento es una función del voltaje entre sus terminales.

Si se conectan dos resistores no lineales en paralelo, como se muestra en la Fig. 2, se tiene una corriente total que circula a dichos resistores no lineales que resulta  $i = g(v)$ , donde,  $g(v) = f_1(v) + f_2(v)$  siendo  $v$  el voltaje aplicado a estos, resultando con esto en un solo resistor no lineal controlado por voltaje.



**Fig. 2. Conexión de dos resistores no lineales en paralelo.**

El resistor no lineal  $N_{R1}$  tiene tres segmentos lineales a trazos con pendientes  $m_{01}$  y  $m_{11}$  y puntos de quiebre  $\pm B_{P1}$  mientras que el otro resistor no lineal tiene pendientes  $m_{02}$  y  $m_{12}$  y puntos de quiebre  $\pm B_{P2}$ . La gráfica compuesta tiene pendientes  $m_{-1}$ ,  $m_0$  y dos pares de puntos de quiebre a  $\pm B_{P1}$  y  $\pm B_{P2}$  como se puede observar en la Fig. 3a.



**Fig. 3. Características v-i de dos resistores no lineales en paralelo. a) gráfica analítica; b) gráfica obtenida desde un osciloscopio.**

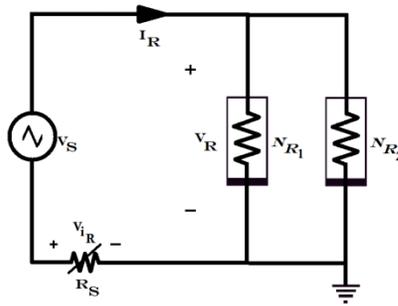
Especificando que tanto  $R_2 = R_1$  así como  $R_5 = R_4$  se tienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
 m_{01} &= \frac{1}{R_1} & m_{02} &= \frac{1}{R_4} \\
 m_{11} &= -\frac{1}{R_3} & m_{12} &= -\frac{1}{R_6} \\
 B_{p1} &= \frac{R_3}{R_2 + R_3} E_{sat} & B_{p2} &= \frac{R_6}{R_5 + R_6} E_{sat}
 \end{aligned}$$

Por lo que de la gráfica compuesta se tiene:

$$\begin{aligned}
 m_{11} + m_{02} &= m_0 \\
 m_{11} + m_{12} &= m_1
 \end{aligned}$$

La gráfica que se puede observar en la Fig. 3b se obtuvo con un osciloscopio realizando pruebas experimentales sólo con los resistores no lineales y un resistor lineal variable en serie con una fuente de voltaje, como se muestra en la Fig. 4. Las características de  $v-i$  de la resistencia negativa, se pueden observar aplicando una señal triangular de amplitud 7V pico-pico, un offset de cero y una frecuencia de 30Hz en serie con la resistencia  $N_R$ .



**Fig. 4. Diagrama esquemático para la obtención de las características v-i de las resistencias negativas.**

Utilizando la opción de visualización de la lectura de señales de dos canales XY, que en este caso, en el eje horizontal se realizó medición de corriente mientras que en el eje Y se midió el voltaje. Ambas medidas fueron realizadas al resistor variable.

## 2.2. Una aplicación con los resistores no lineales

En el presente trabajo se implementaron dos circuitos de Chua modificados como se muestra en la Fig. 2. Para obtener los resistores no lineales se diseñó una estructura como la mostrada en la Fig. 1a utilizándose como amplificadores operacionales los circuitos integrados TL082 de *Analog Devices*, con una alimentación de  $V^+ = +15V$  y  $V^- = -15V$ .

Midiendo los voltajes de los capacitores y realizando retratos de fase del voltaje del capacitor  $C_1$  vs. el voltaje del capacitor  $C_2$  se obtienen gráficas como las que se observan en la Fig. 5. La del lado izquierdo es una bifurcación y la de lado derecho es un ciclo límite. Ambos comportamientos son de interés en área de control no lineal.

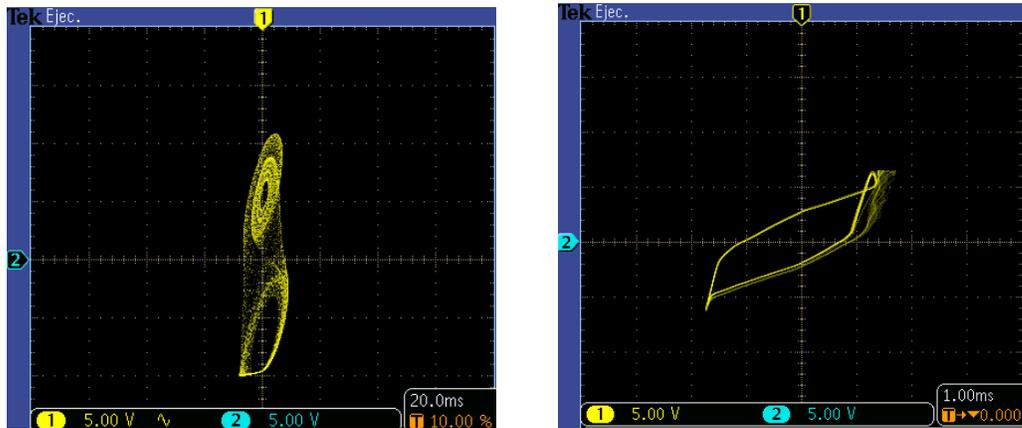
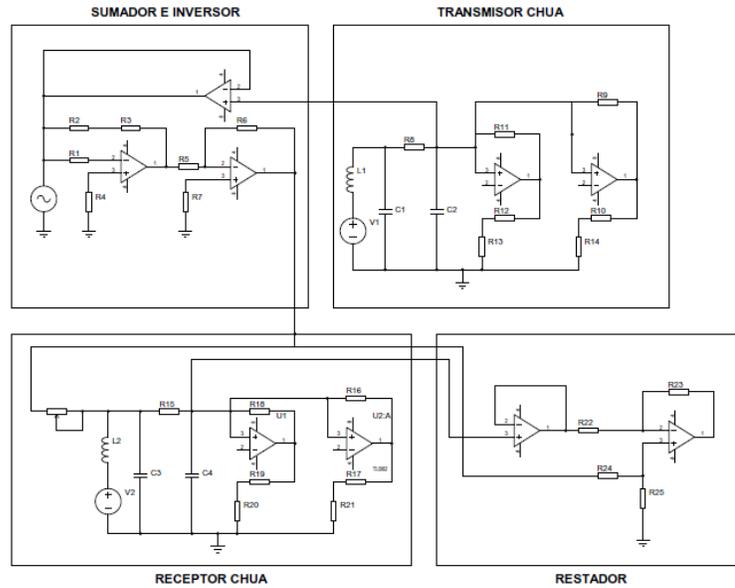


Fig. 5. Retrato de fase del voltaje de  $C_1$  vs. voltaje de  $C_2$ .

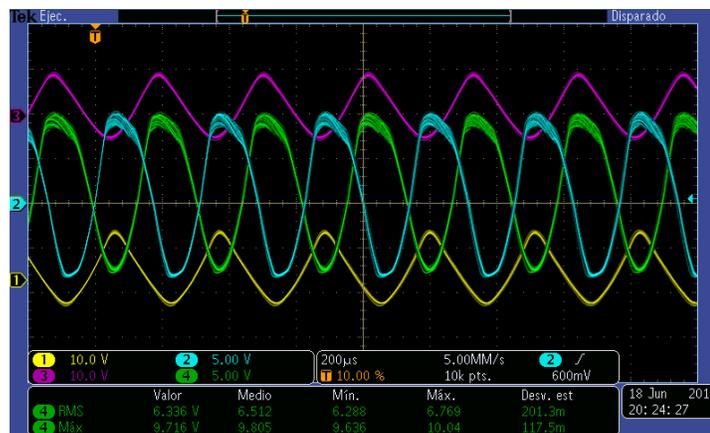
### 3. Resultados

De las múltiples aplicaciones que tiene el circuito de Chua, en el presente trabajo se implementó en forma experimental la reportada en [4], que es para seguridad en comunicaciones, con una modificación: alimentamos un pequeño voltaje en serie con la inductor. Para tal fin fue necesario tener dos circuitos de Chua modificados que tuvieran las mismas características. La señal que reproduce un circuito de Chua es llevada a una etapa sumadora por medio de una configuración de amplificadores operacionales. La señal de la salida de la etapa sumadora se transmite y es llevada hasta una etapa restadora. Esta etapa también se conforma por una configuración de amplificadores operacionales. A esta etapa restadora se le incorpora la señal que se genera del otro circuito de Chua. Esto se visualiza en la Fig. 6.



**Fig. 6. Circuito Implementado con dos circuitos de Chua Modificado.**

En la Fig. 7 se observan los voltajes de los capacitores de los dos circuitos de Chua modificado. Las curvas de color amarillo y azul corresponden a un circuito mientras que los de color morado y verde corresponden al otro circuito.



**Fig. 7. Voltajes de capacitores. Las curvas de color amarillo y azul corresponden a un circuito de Chua modificado y las de color morado y verde al otro.**

En la Fig. 8 se visualizan los retratos de fase que se obtienen con esos mismos voltajes, el que esta de color amarillo se obtiene de los voltajes de las gráfica de color amarillo y azul de la Fig. 7 mientras que el retrato de fase de color morado son con los otros dos voltajes.



**Fig. 8. Retrato de fase de los dos circuitos de Chua.**

Del circuito completo implementado, la señal de referencia al sumador, la señal de salida del sumador y los voltajes de los capacitores de los circuitos de Chua se incorporaron a una tarjeta controladora dSpace 1103. Asimismo, se utilizó como referencia una señal de voltaje (onda cuadrada sin offset de 1 volt pico). En la Fig. 9 se observa dicha referencia (color verde) junto con las señales de salida del sumador (azul) y la salida del sistema completo (roja).

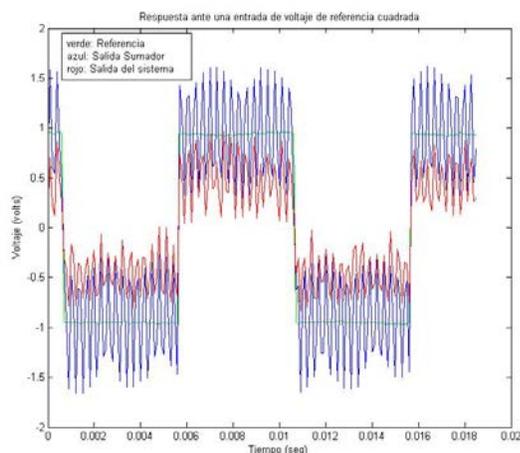


Fig. 9. Voltajes de Referencia y voltajes de salida del sumador y del sistema.

En la Fig. 10 se muestran en dos gráficas los voltajes de los capacitores de los circuitos de Chua, en la parte superior contra el tiempo y en la parte inferior los retratos de fase de dichos voltajes.

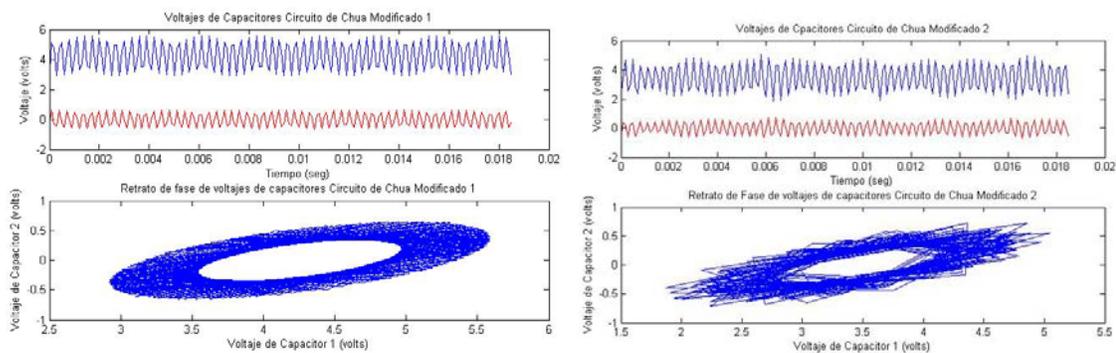


Fig. 10. Voltajes de capacitores de los circuitos de Chua modificado.

## 4. Discusión

Con la implementación de un circuito de Chua modificado pudimos replicar la aplicación sugerida en [4] con la diferencia que aplicamos una alimentación en serie del inductor de nuestro circuito. Este tipo de circuito RLC No Lineal puede presentar distintas conductas, ya sea bifurcaciones o ciclos límites, con solo hacer variar el valor de la resistencia del oscilador. Es por eso que es de gran interés el poder implementarlo en forma física. Con el análisis de estos tipos de comportamientos queda más claro conceptos que se emplean en el área del análisis de sistemas no lineales, como es el concepto de retrato de fase como se puede observar de la Fig. 4 (obtenidas por un osciloscopio) o de la Fig. 9 ya manipuladas en una PC.

Los retratos de fase como los mostrados en las Fig. 5 y 8, son curvas en el plano de las trayectorias de dos variables de estado, en este caso de los voltajes de los capacitores de cada circuito de Chua y de acuerdo a [9], en el capítulo 2, menciona que los sistemas autónomos de segundo orden ocupan un lugar importante en el estudio de sistemas no lineales debido a que las trayectorias pueden representarse por curvas en el plano. Cabe mencionar la importancia que tienen los retratos de fase como herramienta para estudiar el comportamiento local de un sistema no lineal alrededor de un punto de equilibrio.

## 5. Conclusiones

En el presente trabajo se implementó en forma experimental un Circuito RLC No Lineal conocido como Circuito de Chua, el cual se realiza con una modificación a la propuesta por su autor [2]. Con esta modificación la estructura de (3) aumenta con una entrada quedando como:

$$L \frac{d}{dt} i_L = -v_{C2} + v_{ent} \quad (5)$$

con esta entrada del circuito, se está en posibilidades de diseñar alguna estrategia de control para el sistema no lineal. Debido a la inmensa mayoría de los sistemas físicos

tienen una estructura no lineal, este sistema es un acercamiento para construir, analizar sistemas no lineales para posteriormente realizar estrategias de control con herramientas de sistemas no lineales.

Como trabajo futuro está el implementar alguna estrategia de control como la que se presenta en [7] o lo reportado en [8] ya que una estrategia de control de índole lineal, como el conocido PID, no sería fácil de realizar en este sistema.

## 6. Referencias

- [1] M. P. Kennedy, "Robust Op Amp Realization of Chua's Circuit", *Frequenz*, Volumen 46, Número 3-4, March-April 1992, páginas 66-80.
- [2] L.O. Chua, C. A. Desoer, E.S. Kuh, "Linear and Nonlinear Circuits", Ed. McGraw-Hill Book Company, 1987.
- [3] M. P. Kennedy, "Three Steps to Chaos-Part I: Evolution". *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I Fundamental Theory and Applications*. Volumen 40. Número 10. October 1993. Páginas 640-656.
- [4] M. Mulukutla, C. Aissi, "Implementation of the Chua's circuit and its applications", *Proceedings of the 2002 ASEEb Gulf-Southwest Annual Conference*, March 2002.
- [5] M. Mamat, M. Sanjaya, D. S. Maulana, " Numérical Simulation Chaotic Synchronization of Chua Circuit and Its Application for Secure Cmmunication", *Applied Mathematical Sciences*, Volumen 7, 2013, Número 1, 1-10.
- [6] C.-C. Hwang, H. Jin-Yuan, and L. Rong-Syh, "A linear continuous feedback control of Chua's circuit," *Chaos, Solutions & Fractals*, vol. 8, no. 9, pp. 1507–1515, Sep. 1997.
- [7] R. Márquez, H. Sira-Ramírez, "Nonlinear Control of Chua's Circuit", *Midwest Symposium on Circuits and Systems*, Volumen 38, páginas 429-432, Proeedings Published, August 1995.

- [8] H. Mkaouar, O. Boubaker, "Chaos Synchronization for Master Slave Piecewise Linear Systems: Applications to Chua's Circuit", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Volumen 17, Issue 3, Ma.
- [9] H. K. Khalil, "Nonlinear Systmes", Ed. Prentice Hall, Third Edition, 2002.

## **7. Autores**

Dr. Cuauhtémoc Guerrero Tejada obtuvo su título de Dr. En Ingeniería Eléctrica con especialidad en control en la Universidad Nacional Autónoma de México

Dr. Gustavo Montemayor García obtuvo el grado de Dr. En Ingeniería Eléctrica en Rensselaer Polytechnic Institute.

Enok Mitl Hernández Hernández actualmente está cursando el último semestre de la carrera de Ingeniería en Sistemas Electrónicos Industriales en la Universidad Autónoma de la Ciudad de México.