

# Sincronización de distintos sistemas caóticos mediante control clásico y su implementación electrónica

***José Daniel Martínez Morales***

Unidad Académica Multidisciplinaria Zona Media, Universidad Autónoma de San Luis Potosí, Carretera Rioverde-San Ciro km 4, Col Puente del Carmen, Rioverde, S.L.P. (487) 8725099,  
*daniel.martinez@uaslp.mx*

***Guillermo Almazán Martínez***

Unidad Académica Multidisciplinaria Zona Media, Universidad Autónoma de San Luis Potosí, Carretera Rioverde-San Ciro km 4, Col Puente del Carmen, Rioverde, S.L.P. (487) 8725099,  
*galmantz@outlook.com*

***Gustavo Gallegos Fonseca***

Unidad Académica Multidisciplinaria Zona Media, Universidad Autónoma de San Luis Potosí, Carretera Rioverde-San Ciro km 4, Col Puente del Carmen, Rioverde, S.L.P. (487) 8725099,  
*gfonseca@uaslp.mx*

## **Resumen**

Esta contribución aborda el problema de la sincronización de diferentes sistemas caóticos implementados de manera electrónica. La sincronización la realiza un sistema de bajo costo basado en un microcontrolador de 8 bits. Se calcula el sistema dinámico del error de sincronización en el espacio de estados y, posteriormente se define el objetivo de control. Con el fin de lograr la sincronización entre dos sistemas, un controlador clásico proporcional-integral-derivativo (PID) se diseña e implementa. Finalmente, los resultados experimentales muestran la sincronización práctica de los dos osciladores electrónicos.

**Palabras Clave:** controlador PID, sincronización, sistemas caóticos.

## 1. Introducción

Durante las últimas dos décadas, la sincronización en los sistemas dinámicos caóticos ha sido ampliamente investigada. Desde el trabajo de Pecora y Carroll [1], se han propuesto una gran variedad de enfoques para la sincronización de los diversos sistemas caóticos que incluyen los métodos OGY [2], método de diseño backstepping [3], el esquema de retro-alimentación de estados [4]. Que se refiere a la utilización de los controladores clásicos para el problema de sincronización de caos, en este sentido se han propuesto varios esquemas [5, 6, 7]. Sin embargo, en [5] la aplicación del controlador se lleva a cabo en un ordenador digital, lo cual eleva el costo del sistema de sincronización. En [6, 7] se realiza una implementación experimental del controlador en forma analógica para sincronizar los sistemas caóticos llamados sistemas de Sprott y Chua. Por otra parte, la implementación digital es más versátil cuando se debe modificar la ganancia del controlador.

Usando una técnica de control clásico, nosotros mostramos que es posible sincronizar dos sistemas en régimen caótico. En el presente trabajo se muestra la ejecución experimental de un sistema embebido que se compone de dos subsistemas, el subsistema electrónico analógico, constituido por seis osciladores caóticos en lazo abierto, estos sistemas son llamados de Duffing, Lorenz, Rossler, van der Pol, Malasomay el sistema de Lu [8, 9, 10], y un subsistema electrónico digital basado en un microcontrolador de 8 bits que calcula la ley de control clásica para sincronizar dos sistemas caóticos distintos. Este sistema embebido es construido con el propósito de sincronizar el comportamiento caótico en señales electrónicas y verificar experimentalmente las técnicas de control clásico. Además, debido a que es de bajo costo puede ser utilizado para fines educativos. Asimismo, se analiza la estabilidad del sistema del error de sincronización por medio de los criterios de Routh-Hurwitz y el método del lugar de raíces. El diseño del controlador se llevó a cabo por medio de la técnica de asignación de polos, considerando tres criterios de desempeño.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera: en la sección 2, se describe la construcción experimental de los osciladores caóticos. En la sección 3, se plantea el problema de sincronización entre dos sistemas caóticos y el diseño del controlador clásico proporcional, integral y derivativo (PID) para llevar a cabo la sincronización. En la sección 4 se muestran los resultados experimentales al aplicar la señal de control PID a los osciladores electrónicos. Finalmente en la sección 5 se dan las conclusiones.

## 2. Construcción experimental

Con el fin de observar el comportamiento de sincronización de caos, partimos de los sistemas caóticos en la siguiente forma triangular:

$$\dot{x}_{1m} = x_{2m} \quad (1)$$

$$\dot{x}_{2m} = x_{3m} \quad (2)$$

$$\dot{x}_{3m} = f(x_{1m}, x_{2m}, x_{3m}; \alpha) \quad (3)$$

donde  $x_m \in \mathbb{R}^3$ ,  $f(x_{1m}, x_{2m}, x_{3m}; \alpha)$  es una función no lineal y  $\alpha$  es el parámetro de bifurcación con la que el sistema puede ser caótico. El segundo sistema caótico considerado en forma triangular es el siguiente:

$$\dot{x}_{1s} = x_{2s} \quad (4)$$

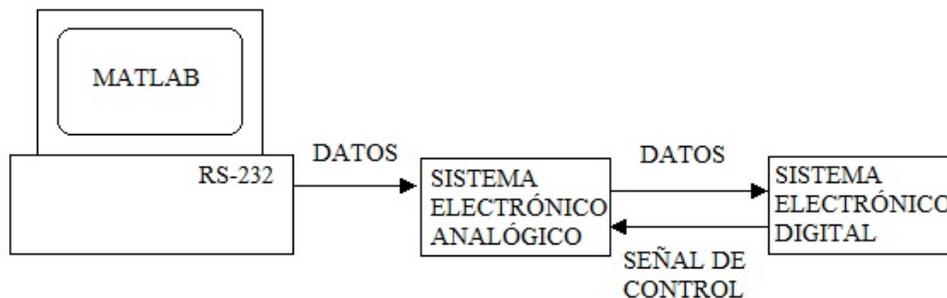
$$\dot{x}_{2s} = f(x_{1s}, x_{2s}; a) + \tau(t, b) \quad (5)$$

donde  $x_s \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(x_{1s}, x_{2s}; a)$  es una función no lineal y  $\tau(t, b)$  es una excitación externa. Posteriormente, se define el error de sincronización como  $e_i = x_{im} - x_{is}$ , para  $i = 1, 2$ , donde  $x_{im}$  y  $x_{is}$  representan los estados del sistema maestro y sistema esclavo respectivamente, por lo tanto, el sistema de error de sincronización está descrito por:

$$\dot{x}_1 = e_2 \quad (6)$$

$$\dot{x}_2 = f(x_{im}, x_{is}; \tau, a, \alpha) - u \quad (7)$$

donde  $f(x_{im}, x_{is}; \tau, a, \alpha)$  es una función no lineal,  $\tau$ ,  $a$  y  $\alpha$  son el conjunto de parámetros de los sistemas caóticos, y  $u$  denota la ley de control de realimentación. El objetivo es encontrar una ley de control que establezca el sistema del error de sincronización en el origen. Para alcanzar el objetivo de control, en la Fig. 1 se muestra una representación esquemática del lazo de control empleado.



**Fig. 1. Lazo de control para la sincronización de dos sistemas caóticos.**

El objetivo del bloque de control es llevar la señal de salida hacia una señal deseada (es decir, de referenciar) por medio de un comando de control,  $u$ , que es calculado mediante la referencia y la señal de salida,  $E = e_1 - r$ , el bloque P, representa el modelo matemático de la planta para la que se desarrolla el controlador. Una vez que se ha alcanzado el objetivo de control, es decir,  $e_1 \approx r = 0$ , se consigue la sincronización práctica. El sistema electrónico analógico está compuesto por seis osciladores caóticos escalados en tiempo y amplitud. Los osciladores fueron construidos mediante amplificadores operacionales, resistencias y capacitores. Los sistemas caóticos contienen un espectro continuo de frecuencias, este espectro está centrado en  $f \approx 1.06$  Hz mediante el uso de la siguiente fórmula  $f = 1/(2\pi RC)$ , donde el producto  $RC$  es la constante de tiempo de los osciladores.

En la Fig. 2 se muestra la configuración experimental. A través del puerto RS-232 de la computadora, los datos sobre la selección de los sistemas a sincronizar, se envían al sistema electrónico analógico y este a su vez al sistema electrónico digital que contiene un microcontrolador modelo AT89C52, multiplexores y relés, todos ellos para seleccionar los osciladores caóticos a sincronizar.

En la Fig. 3 se muestra el sistema integrado, donde es posible observar cada una de sus partes, como los osciladores a) Duffing, b) Malasoma, c) Lorenz, d) Lü, e) Rössler, f) van der Pol, y g) multiplexores analógicos, h) microcontrolador, i) puerto serie, y j) sistema electrónico digital en la Fig. 4. Por otra parte, en la Fig. 3,  $x_m$  y  $x_s$ , denotan los estados de los sistemas maestro y esclavo respectivamente, de acuerdo a la selección de los osciladores,  $u$  denota la ley de control, así mismo las flechas indican si las variables entran o salen del sistema integrado.

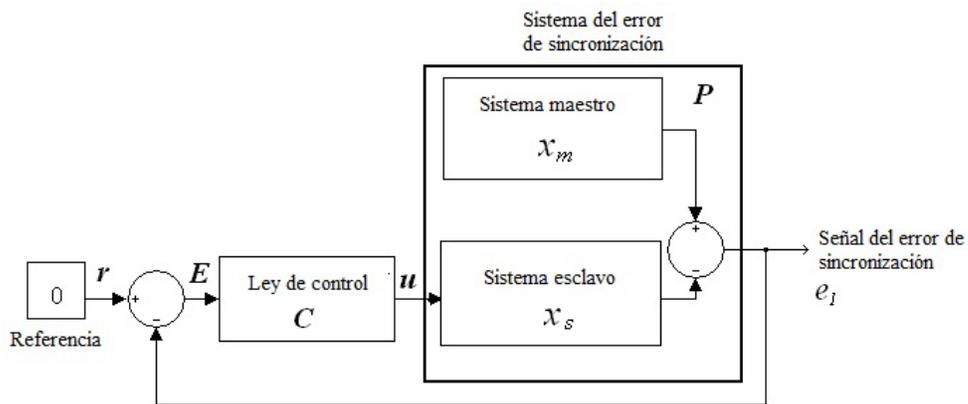
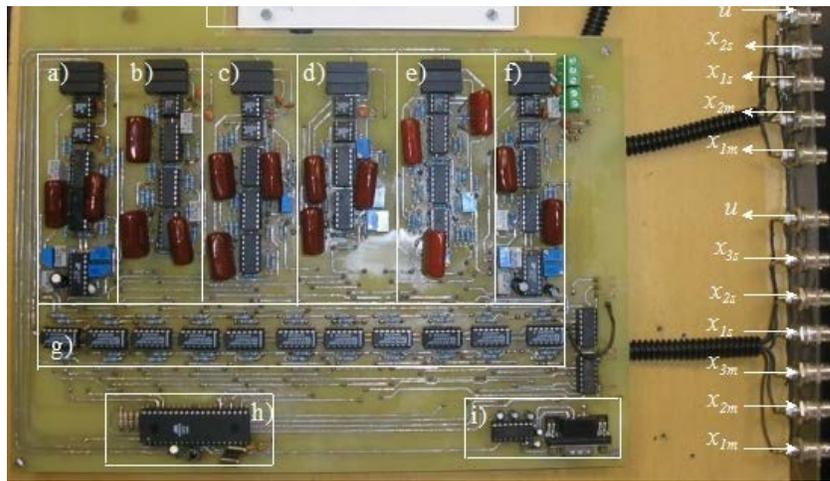
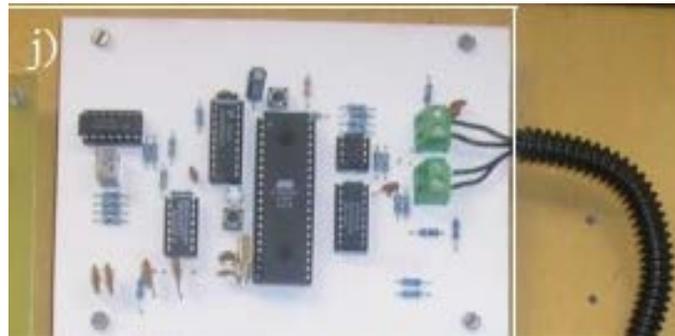


Fig. 2. Configuración de los sistemas electrónicos analógico y digital.



**Fig.3. Sistema electrónico analógico de osciladores caóticos.**



**Fig.4. Sistema electrónico digital para el cálculo de la ley de control.**

Para la realización del sistema electrónico digital, se utiliza un convertidor analógico-digital (ADC) con una resolución de 8 bits y un tiempo de conversión de  $100\mu\text{s}$  con rango de voltajes permitidos a la entrada de  $\pm 10\text{ V}$ , modelo ADC0804LCN, de manera que el microcontrolador puede procesar la señales de los sistemas maestro y esclavo. Además, se utilizó un convertidor digital-analógico (DAC) modelo DAC0800LCN, de 8 bits de resolución y un tiempo de establecimiento de  $100\text{ ns}$ , con un rango de voltajes en su salida de  $\pm 10\text{ V}$ , para aplicar la señal de control en el sistema del error de sincronización. También se utilizaron multiplexores analógicos modelo HCF4066B para seleccionar el

convertidor analógico-digital entre los estados de los osciladores. Por último, un microcontrolador de 8 bits modelo AT89C52, fue empleado para calcular la ley de control.

### 3. Diseño del controlador

Para la sincronización de los dos sistemas caóticos presentados en la sección 2, el sistema dinámico del error se describe por (6) y(7). Consideramos al controlador clásico proporcional, integral y derivativo de la siguiente forma  $u_1 = K_p e_1 + K_d e_2 + K_i \int e_1 dt$ , donde  $K_p$ ,  $K_i$  y  $K_d$  son parámetros ajustables. Para el controlador PID aplicado en la segunda ecuación de estado (7), el sistema del error de sincronización resulta en:

$$e_1 = x_{1m} - x_{1s} \Rightarrow \dot{e}_1 = x_{2m} - x_{2s} = e_2 \quad (8)$$

$$e_2 = x_{2m} - x_{2s} \Rightarrow \dot{e}_2 = \phi(x_{3m}, x_{1s}, x_{2s}, t; a, b) - [K_p e_1 + K_i z + K_d e_2] \quad (9)$$

$$\dot{e}_3 = e_1 \quad (10)$$

Donde  $\phi(x_{3m}, x_{1s}, x_{2s}, t; a, b) = x_{3m} - x_{1s} + x_{2s} + a x_{2s} - b \sin(\omega t)$  es una función no lineal. Observe que en el sistema del error de sincronización resulta un nuevo estado debido a la parte integral del regulador, además se asume que todos los estados de los osciladores maestro y esclavo se pueden medir. Escribiendo el sistema (8) a (10) en forma vectorial tenemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -K_p & -K_d & -K_i \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \phi(x_{3m}, x_{1s}, x_{2s}, t; a, b) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Para analizar la estabilidad del sistema del error de sincronización, nos interesa linealizarlo en una vecindad alrededor del origen. Una vez linealizado el sistema puede ser escrito en la forma:

$$\dot{e} = Ae \quad (12)$$

Así, mediante la teoría de control lineal, si la matriz  $A$  del sistema (12) es Hurwitz, el sistema es localmente estable, lo que implica que los sistemas caóticos están sincronizados. Por lo tanto el sistema de error (11) con:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -K_p & -K_d & -K_i \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

tiene todos sus eigenvalores con parte real negativa si  $K_d K_p > K_i > 0$ . Ahora procedemos a sintonizar el controlador PID. Para esto se utilizó la técnica de asignación de polos. Además con el fin de obtener una medida del desempeño, se han considerado tres índices, definidos como: 1.- La integral del error cuadrático:

$$ISE = \int_0^T [e(t)]^2 dt \quad (14)$$

este índice da mayor énfasis a errores grandes, que se presentan generalmente al comienzo de la respuesta y menor énfasis a errores pequeños que generalmente se producen hacia el final de la respuesta. 2.- La integral del valor absoluto del error multiplicado por el tiempo:

$$ITAE = \int_0^T t |e(t)| dt \quad (15)$$

este índice pondera en forma más marcada a los errores que ocurren cuando  $t$  tiende a valores grandes. 3.- Finalmente se considera el siguiente índice de desempeño:

$$I = \int_0^T |e(t)|^2 dt + \int_0^T |u(t)|^2 dt \quad (16)$$

donde  $e(t)$  es la señal del error de sincronización y  $u(t)$  es la señal del controlador, el índice es una medida de la energía del sistema en lazo cerrado, lo que nos permite distinguir cuales controladores generan menor energía. El límite superior de la integral es  $T = 40$  segundos, considerado como el tiempo total del experimento.

La Tabla 1 muestra los resultados obtenidos del cálculo de los índices de desempeño, obtenidos usando el controlador PID diseñado mediante asignación de polos.

Parámetros del controlador	ISE	ITAE	I
$K_p=11, K_i=6, K_d=6$	2.4	54	12.5
$K_p=14, K_i=8, K_d=7$	2.2	42	9.1
$K_p=17, K_i=10, K_d=8$	0.6	37	13.7
$K_p=20, K_i=12, K_d=9$	2.6	42	12.6
$K_p=23, K_i=14, K_d=10$	1.5	37	12

**Tabla 1. Índices de desempeño del controlador PID.**

De la Tabla 1 se deduce que los parámetros del controlador  $K_p = 17, K_i = 10, K_d = 8$  minimizan los índices ISE e ITAE, sin embargo, el índice I alcanza su más grande valor, de esto se puede concluir que el controlador PID reduce el error en estado estable pero con una señal de control de mayor energía lo que conduce a grandes sobretiros. Debido a que el sistema linealizado del error de sincronización puede ser expresado por el siguiente sistema de ecuaciones:

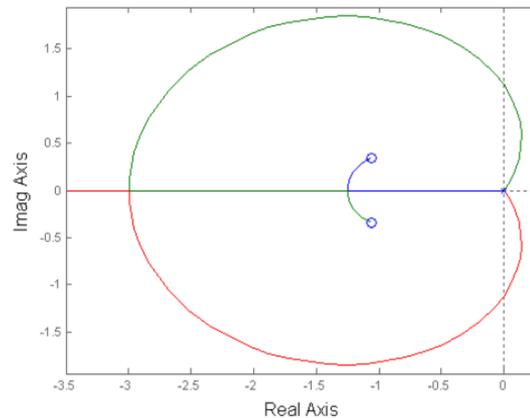
$$\dot{x}_1 = e_2 \tag{17}$$

$$\dot{x}_2 = u \tag{18}$$

donde  $u = -K_p e_1 - K_d e_2 - K_i \int e_1 dt$ , para un controlador PID, la función de transferencia del sistema es  $E(s)/U(s) = 1/s^2$ . Y la función de transferencia del controlador PID es:

$$T_{pid}(s) = \frac{K_d[s^2 + as + b]}{s} \tag{19}$$

donde  $a = K_p/K_d$  y  $b = K_i/K_d$ . Con el uso de MATLAB se ha construido el lugar de las raíces cuando se incrementa el parámetro  $K_d$ . El lugar de las raíces se muestra en la Fig. 5. Observe que para pequeñas ganancias de  $K_d$  el controlador PID es inestable.



**Fig. 5. Lugar de las raíces del controlador PID.**

#### **4. Resultados experimentales de la sincronización de dos sistemas caóticos**

Con el objetivo de observar la sincronización de los sistemas experimentalmente, los sistemas caóticos (1) a (5) fueron implementados por circuitos que reproducen el comportamiento caótico. En la Fig. 6 se puede observar que el sistema esclavo sigue la trayectoria del sistema maestro. La señal de control  $u$  que produce la sincronización de los dos sistemas caóticos se muestra en la Fig. 7.

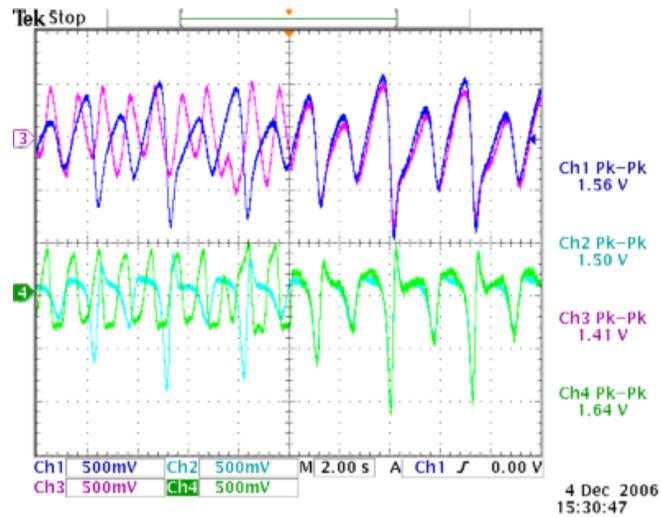


Fig. 6. Sincronización de los sistemas caóticos después de aplicar la señal de control PID.

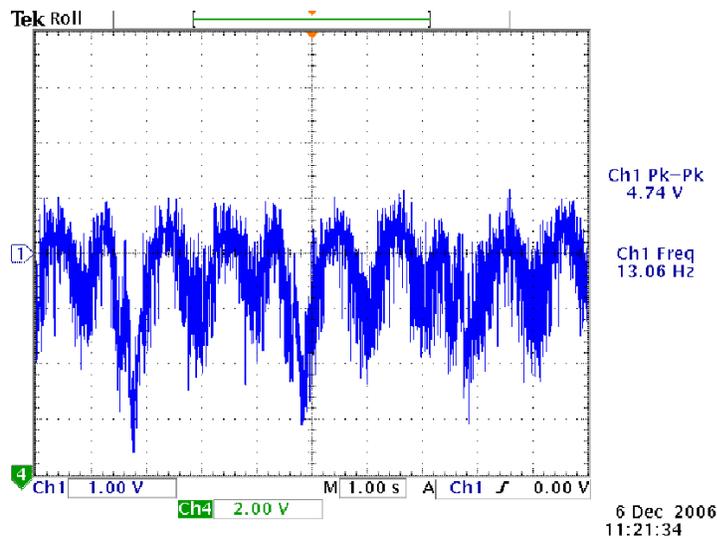


Fig. 7. Señal de control PID para la sincronización de dos sistemas caóticos.

## 5. Conclusiones

En este trabajo se muestra que el comportamiento caótico en dos sistemas electrónicos diferentes se puede sincronizar mediante el uso de un controlador PID. Además, un

sistema de bajo costo electrónico basado en un microcontrolador de 8 bits es capaz de sincronizar estos sistemas. Después de la prueba de Routh-Hurwitz y el método del lugar de raíces del sistema del error de sincronización, se observó que el controlador PID tiene restricciones en sus parámetros ( $K_p$ ,  $K_i$ ,  $K_d$ ) para garantizar la estabilidad. El subsistema digital es versátil ya que no requiere el cambio de componentes para cambiar las ganancias del controlador PID, sólo es necesario cambiar el programa del microcontrolador, a diferencia de los sistemas analógicos. El sistema integrado puede ser utilizado como equipo didáctico y también es posible utilizar el sistema embebido para validar experimentalmente algoritmos de control para la sincronización o la supresión de caos.

## 6. Referencias

- [1] L.M.Pecora, T.L.Carroll. "Synchronization in chaotic systems". *Physics Review Letter*. Volumen 64. Número 8. Año 1990. Páginas 821-824.
- [2] E. Ott, C. Grebogi, J.A. Yorke. "Controlling chaos". *Physics Review Letter*. Volumen 64. Número 11. Año 1990. Páginas 1196-1199.
- [3] T. Xiaohui, J. Zhang, Y. Yang. "Synchronizing chaotic systems using backstepping design". *Chaos, Solitons&Fractals*. Volumen 16. Número 1. Año 2003. Páginas 37-45.
- [4] R. Femat, L. Kocarev, L. van Gerven, M. E. Monsivais. "Towards generalized synchronization of strictly different chaotic systems". *Physics Letters A*. Volumen 342. Número 3. Año 2005. Páginas 247-255.
- [5] R. Femat, J. Capistrán, G. Solís. "Laplace domain controllers for chaos control". *Physics Letters A*. Volumen 252. Número 1-2. Año 1999. Páginas 27-36.

- [6] Y. Hou, H. Chen, J. Chang, J. Yan, T. Liao. "Design and implementation of the Sprott chaotic secure digital communication systems". *Applied Mathematics and Computation*. Volumen 218, Número 24, Año 2012. Páginas 11799-11805.
- [7] L. Torres, L. Aguirre. "PCChua- A laboratory setup for real time control and synchronization of chaotic oscillations". *International Journal of Bifurcation and Chaos*. Volumen 15, Número 8, Año 2005. Páginas 2349-2360.
- [8] R. Gilmore, M. Lefranc. *The topology of chaos*. Segunda edición. 2012. Wiley-VCH. New York. Páginas 618.
- [9] J. Malasoma. "A new class of minimal chaotic flows". *Physics Letters A*. Volumen 305. Número 1-2. Año 2002. Páginas 52-58.
- [10] F. Han, Y. Wang, X. Yu, Y. Feng. "Experimental confirmation of a new chaotic attractor". *Chaos, Solitons and Fractals*. Volumen 21. Número 1. Año 2004. Páginas 69-74.

## **7. Autores**

José Daniel Martínez Morales obtuvo el grado de doctor en ingeniería eléctrica por parte de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí. Actualmente es profesor investigador de tiempo completo de la carrera Ingeniería Mecatrónica en la Unidad Académica Multidisciplinaria Zona Media de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí.

Guillermo Almazán Martínez actualmente es estudiante de quinto semestre de la carrera de Ingeniería Mecatrónica en la Unidad Académica Multidisciplinaria Zona Media de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí.

Gustavo Gallegos Fonseca actualmente es profesor investigador de tiempo completo en la Unidad Académica Multidisciplinaria Zona Media de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí.