EL LABORATORIO DE MATEMÁTICAS EN UN CURSO DE CÁLCULO

Adelina Silva Muslera
Universidad Autónoma de Querétaro
muslera@uaq.mx

Joaquín Roldán Jiménez
Universidad Autónoma de Querétaro
roldanjj@uaq.mx

RESUMEN

La idea de un laboratorio en la enseñanza de las matemáticas es lo que origina este trabajo. El enfoque instrumental se usa como referente teórico para guiar las actividades desarrolladas en el laboratorio de un curso de cálculo, en el cual se usa el software GeoGebra como herramienta. Este trabajo hace referencia sólo a las primeras dos prácticas de las cuatro propuestas para el curso de cálculo diferencial.

PALABRAS CLAVES: laboratorio de matemáticas, enfoque instrumental, génesis instrumental, orquestación instrumental, GeoGebra.

1. INTRODUCCIÓN

Este trabajo tiene su origen en los programas de estudio de las materias de matemáticas de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro que tienen destinada una hora a la semana para laboratorio. En estos programas no se determina con exactitud cuál es el trabajo a realizar en estos laboratorios, aunque se indican posibles temas a tratar y además se señala que es posible usar algún tipo de software.

El laboratorio al que hace referencia este trabajo corresponde a la asignatura de Cálculo Diferencial del plan de estudios de la carrera de Ingeniería Electromecánica. Esta asignatura es de primer semestre y de ella se consideran los temas: funciones, límites laterales, límite infinito, límite al infinito, e interpretación geométrica de la derivada para el desarrollo de las prácticas propuestas.

La idea de un laboratorio en la enseñanza de las matemáticas tiene una componente esencial que es representada por la relación entre los aspectos de manipulación de las actividades propuestas y el aprendizaje de las matemáticas, por lo tanto está relacionada con la tradición pedagógica y didáctica de los métodos activos, ejemplificados por Dewey, Montessori o Pestalozzi.

El desarrollo de un laboratorio de matemáticas requiere de condiciones relacionadas con la participación del profesor. Ruthven (2007) explica que la facilitación de las clases en los laboratorios no sólo rompe las rutinas habituales de aula, sino también plantea mayores exigencias a los profesores para controlar las actividades de la clase.

La orquestación instrumental se usa en este trabajo para guiar las actividades del profesor y gestionar los procesos de la génesis instrumental de los estudiantes.

Este documento está dividido en dos partes. En la primera parte se presentan las referencias teóricas usadas en la construcción y análisis de las actividades desarrolladas por los estudiantes en los laboratorios de matemáticas. La segunda parte describe las actividades realizadas en el laboratorio de matemáticas, en particular las de la primera y segunda práctica y las conclusiones del trabajo en el laboratorio.

Marco Teórico

La principal característica de los laboratorios de matemáticas es que son lugares para experimentos. El material que debe tener el laboratorio incluye ordenadores, libros y todo tipo de objetos que puedan ser utilizados para los experimentos o construcciones matemáticas. Pero lo primero en lo que se debe de pensar, es en un buen conjunto de actividades a proponer a los estudiantes participantes en los laboratorios.

Estas actividades deben ser abiertas, deben permitir la experimentación en las tareas a cumplir y deben contar con temas nuevos para probar y explorar. El ambiente durante las actividades debe de ser de participación y cooperación entre los estudiantes y el profesor. El profesor debe servir de guía y buscar que las tareas se cumplan.

Por lo tanto, en una actividad de laboratorio de matemáticas se identifican: la presencia de herramientas, la presencia de un guía y el trabajo realizado de forma individual, en pequeños grupos o en momentos colectivos.

El enfoque instrumental puede ser una guía para el diseño de las actividades de los laboratorios de matemáticas. ”La idea del laboratorio de matemáticas, cuestiona la posibilidad de crear buenos contextos para que los estudiantes desarrollen instrumentos matemáticos y construyan significados matemáticos” (Maschietto & Trouche, 2010)

En el enfoque instrumental la primera idea es la distinción entre lo que se conoce como artefacto y lo que se llama instrumento. Desde la ergonomía cognitiva, Verillon & Rabadel (1995) señalan la diferencia entre un artefacto, un objeto dado y un instrumento como un constructo psicológico: el instrumento no existe en sí mismo, el artefacto se hace instrumento cuando el sujeto ha sido capaz de apropiarse de él y lo ha integrado en su actividad

El artefacto se hace un instrumento para un individuo a través de una génesis progresiva, llamada génesis instrumental. En Trouche (2004) se señala que es un proceso complejo, vinculado a las características de los artefactos (sus potencialidades y restricciones) y a la actividad del sujeto, a sus conocimientos y métodos de trabajo.

La génesis instrumental puede ser vista como la combinación de dos procesos. Un proceso de instrumentalización, orientado hacia el artefacto y un proceso de instrumentación, orientado hacia el sujeto.

A través del proceso de instrumentalización el usuario puede modificar el artefacto y éste se convierte en un medio para lograr un objetivo, resolver un problema, completar una tarea (da sentido a una situación de actividad, por lo que tiene que ser transformado en un instrumento). Esta transformación del artefacto está intrínsecamente vinculada a la transformación del usuario, a través del proceso de instrumentación el usuario desarrolla los esquemas de utilización y las técnicas mediante las cuales el artefacto puede ser implementado en la acción propuesta; "la instrumentación es precisamente el proceso por el cual el artefacto imprime su marca en el sujeto, permite desarrollar una actividad dentro de algunas fronteras (las restricciones del artefacto)". (Trouche, 2004)

La complejidad propia de la génesis instrumental hace necesario que el profesor intervenga en las actividades de los estudiantes con la finalidad de hacer una herramienta de aprendizaje eficaz. "Se llama orquestación instrumental a un plan de acción, partiendo de un sistema de explotación (la escuela, en este caso) organizada con la visión de dirigir la acción instrumentada de los estudiantes". (Guin & Trouche, 2002).

2. METODOLOGÍA

Contexto y Actividades

En los experimentos de enseñanza del curso de cálculo diferencial participan 14 estudiantes, son alumnos del primer semestre de Ingeniería Electromecánica de la Universidad Autónoma de Querétaro, sus edades varían entre los 17 y los 20 años. Cada uno tuvo disponible una computadora con el software GeoGebra, creado bajo el amparo de licencia GLP por Markus Hohenwarter. "Proporciona una conexión cercana entre la manipulación simbólica y las capacidades de visualización de un sistema de álgebra computacional (CAS) y la variabilidad dinámica de un sistema de geometría dinámica (SGD)". (Hohenwarter & Jones, 2007)

Los datos obtenidos son archivos del software realizados durante las sesiones de trabajo. Estos se transforman en descripciones para un mejor manejo de datos. A estas descripciones se le suman las anotaciones que se obtienen durante cada una de las sesiones. De esta forma se interpreta el actuar de los estudiantes en las sesiones. Rodriguez-Romero (1992) señala que los documentos permiten acceder a un campo de información "natural", en el sentido de no mediatizada por procedimientos de recogida de datos más intrusivos, que utilizan estrategias interactivas de obtención de información.

En la planeación del laboratorio se estableció que los estudiantes debían tener al final del semestre al menos cuatro trabajos realizados en el laboratorio, tres con el resultado de las prácticas propuestas y el cuarto con los elementos de lo que se llama proyecto final. No hay un guión fijo para la realización de estos trabajos, el profesor de la asignatura tiene la libertad de proponer las prácticas y el proyecto final de acuerdo a las necesidades particulares propias y las de los estudiantes del curso.

En el curso que ocupa este trabajo se propusieron las prácticas que se encuentran en la Tabla1.

Práctica	Actividades propuestas
Funciones	I. Grafique cada una de las siguientes funciones usando GeoGebra y determine sus dominios. 1. $f(x)=\sqrt[4]{x-2}$ 2. $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x+4}-3$ 3. $f(x)=\left\|\,\|x\|-1\right\|$

4. $f(x)=\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

5. $f(x)=x+\frac{x^2}{\sqrt{x-1}}$

6. $f(x)=3^{\cos(x)}$

7. $f(x)=2-e^{-x}$

8. $f(x)=\ln(x+3)$

9. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

10. $f(x)=\frac{x+1}{2x+1}$

II. Considere las gráficas de las funciones 1-5, escriba las ecuaciones para las gráficas que se obtienen a partir de la gráfica de f como se indica y obtenga sus gráficas usando GeoGebra.

a) Desplácela 3 unidades hacia arriba.

b) Desplácela 2 unidades hacia abajo.

c) Desplácela 5 unidades hacia la derecha.

d) Desplácela 4 unidades hacia la izquierda.

e) Refléjela respecto al eje x.

f) Refléjela respecto al eje y.

g) Alárguela verticalmente un factor de 3.

h) Contráigala verticalmente un factor de 2.

	III. Usando las funciones 6-10 obtenga las siguientes ecuaciones y sus gráficas en GeoGebra. a) f(2x) b) f(-x) c) –f(x) d) f(x+4) e) 5f(x)-3 f) f(x)+4 g) f((1/2)x) h) 2f(x)
Límites	1.- Evalúe la función $f(x)=\frac{1}{x^3-1}$ para valores de x que tiendan a 1, desde la izquierda y desde la derecha. Determine $\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x^3-1}$ y $\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x^3-1}$ 2.- Usando la gráfica de $y=e^{\frac{-x}{10}}$ y $y=0.1$ determine cuanto tiene que aumentar x de modo que $e^{\frac{-x}{10}}<0.1$ Determine $\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-x}{10}}$ 3.- Evalúe la función $g(x)=\frac{1}{x(x-1)}$ para: a) Valores de x cercanos a 0, desde la izquierda y desde la derecha. b) Valores de x cercanos a 1, desde la izquierda y desde la derecha. c) Valores $\lvert x\rvert$ grandes, que ocurre con g(x)

	d) Determine $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x(x-1)}$, $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x(x-1)}$, $\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x(x-1)}$, $\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x(x-1)}$, $\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x(x-1)}$ y $\lim_{x\to +\infty}\frac{}{x(}$
Asíntotas	1.- Grafique la función $f(x)=\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$ ¿cuántas asíntotas horizontales y verticales observa? Estime los valores de los límites $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$ y $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$ Calcule los valores exactos de los límites. ¿Obtiene los mismos valores para estos límites? 2.- Calcule las asíntotas horizontales y verticales de $y=\frac{x-9}{\sqrt{4x^2+3x+2}}$ y compruebe su respuesta graficando la curva. 3.- Calcule $\lim_{x\to\infty}=\left(\sqrt{x^2+3x+1}-x\right)$ y compruebe su respuesta con GG.
Proyecto	Interpretación geométrica de la derivada usando una función polinomial.

Tabla1. Actividades propuestas para cada una de las prácticas del curso.

Los trabajos de cada una de las prácticas son archivos de GeoGebra que cada uno de los estudiantes logra realizar durante las sesiones, las sube al Campus Virtual de la universidad en el espacio creado especialmente para cada práctica. Esto permite que el profesor revise el trabajo de los estudiantes entre cada una de las sesiones y de ser necesario, realizar señalizaciones en las siguientes sesiones para mejorar el trabajo de los estudiantes.

3. RESULTADOS

Desarrollo de Actividades

El laboratorio inicia con una sesión donde se les indica a los estudiantes la forma en que van a trabajar durante todas las sesiones. También se les invita a crear sus cuentas individuales en el Campus Virtual de la universidad y las condiciones de uso del mismo. Al llegar al tema del uso de GeoGebra, en su mayoría declaran que ya lo conocen y lo han usado en cursos anteriorc acerca del software.

Para la realización de la primera práctica que corresponde a funciones fue necesario usar tres sesiones. En la primera sesión los estudiantes se concentran en sus computadoras y las preguntas que realizan son sobre el uso de los comandos del software. En el enfoque instrumental se consideran como restricciones de comandos (Guin & Trouche, 2002). Se observa que, en general, tienen poca habilidad para el manejo del software y sobre todo de la manipulación de la ventana gráfica. Al finalizar el tiempo de la sesión guardan sus archivos en el Campus Virtual, lo que permite que el profesor revise durante la semana los trabajos realizados, no realiza retroalimentaciones explicitas a través de este medio ni durante las clases teóricas. Aunque si da indicaciones, no directas, acerca de lo que es posible mejorar en los archivos que él ha revisado.

La actitud de los estudiantes en la segunda sesión es más relajada, invitan al profesor a revisar sus trabajos en la computadora. Esto permite al profesor dar indicaciones acerca del uso de la ventana gráfica, del uso de la barra de herramientas y se les señala el uso de la parte central del ratón. Sin moverse de sus lugares se van formado pequeños grupos de trabajo, aunque hay todavía estudiantes que trabajan de forma individual.

Uno de los estudiantes promueve el uso de la herramienta deslizador, sin embargo no les es atractiva al resto de los estudiantes.

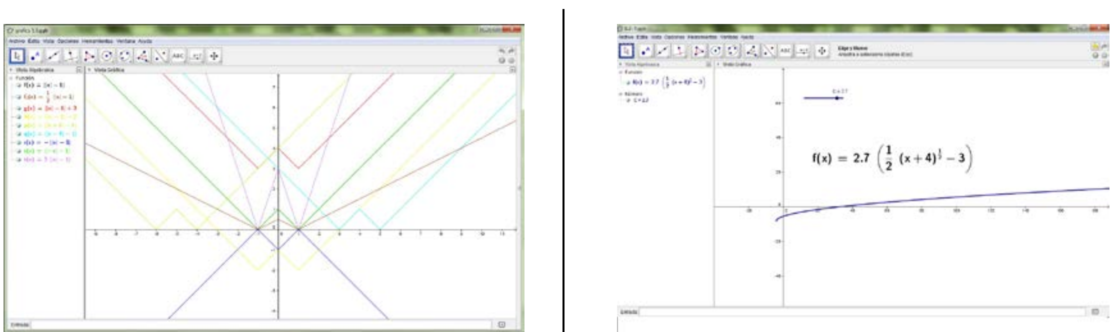
A punto de finalizar la segunda sesión, el profesor les pide que hagan un balance acerca de la opinión que tienen de los temas de la práctica y del software. Estas son algunas de las opiniones:

- Bueno, yo ya había utilizado GeoGebra… pero… no sabía que se podía hacer todo esto en él.

- Me ha costado trabajo escribir esas funciones…. Si fueran más fáciles ya hubiera terminado la práctica.
- Ahora ya sé cuál es la gráfica de esas funciones complicadas!.
- No se cómo usar eso del deslizador,… mejor no lo uso… y sigo como antes.

En la tercera sesión, es necesario que el profesor proyecte en la pantalla frontal del laboratorio el escritorio de su computadora para mostrar a los alumnos la ventana de propiedades y que cambien los aspectos de sus archivos. Esto se originó porque algunos estudiantes no sabían cómo hacerlo y querían que sus archivos tuvieran color, propiciando un momento de actividad colectiva en la sesión.

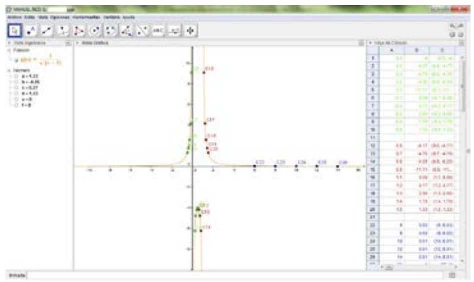
En la Figura 1 se muestran dos archivos de la primera práctica, son dos ejercicios diferentes de dos estudiantes, en (a) el estudiante realiza la gráfica de la función y las gráficas de esa función trasladada y desplazada; en (b) el estudiante usa el deslizador para desplazar la función.



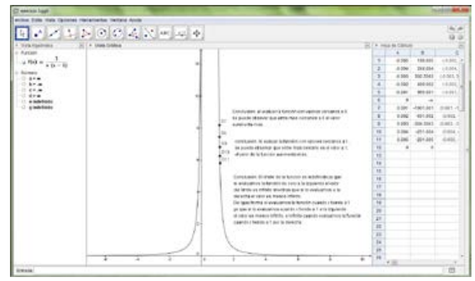
(a) (b)

Figura1. Archivos de la primera práctica de dos estudiantes.

La segunda práctica, la de límites laterales, fue necesario usar dos sesiones. En ambas sesiones los estudiantes trabajan al inicio de la sesión de forma individual, y conforme pasa el tiempo forman pequeños grupos de trabajo. Intercambian ideas acerca de cómo usar el software y de los resultados obtenidos. Entre ellos se hacen correcciones y comparten conocimientos.



(a)

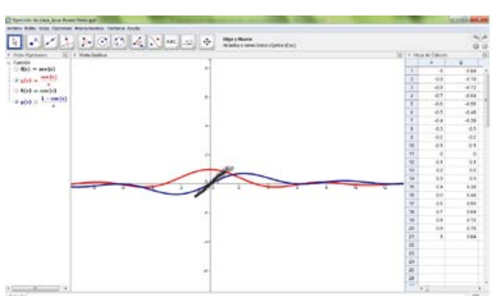


(b)

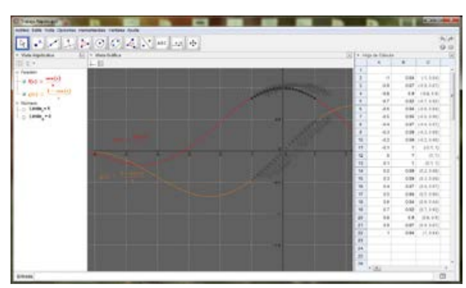
Figura 2. Archivos de la segunda práctica de dos estudiantes.

En la Figura 2 se muestran dos archivos de la segunda práctica, corresponden al mismo ejercicio de dos estudiantes diferentes, en (a) el estudiante obtiene la gráfica de la función y usa la hoja de cálculo para observar el comportamiento de la función por la derecha y la izquierda, de esa forma infiere el límite; en (b) el estudiante obtiene la gráfica de la función y también usa la hoja de cálculo para observar el comportamiento de la función por la derecha y la izquierda, sólo que escribe sus conclusiones porque no ha inferido el límite; sucede que no tiene la perspectiva de la gráfica completa de la función, debe de desplazar la zona gráfica para observarla. En De-la-Torre & Silva (2009) se señala que un motivo para que ocurra esto se debe a que los estudiantes no están acostumbrados a visualizar sus resultados.

Durante la segunda sesión, los alumnos solicitaron al profesor realizar en el laboratorio los dos límites trigonométricos. Eso hace que se use la siguiente sesión para tal fin. En la Figura 3 se muestra los resultados obtenidos por dos estudiantes.



(a)



(b)

Figura 3. Archivos de la práctica solicitada por los estudiantes.

La actitud de los estudiantes en esta sesión es de trabajar en equipo, ellos ya saben que es lo que deben hacer y entre ellos se explican, de allí la buena presentación de los archivos.

4. CONCLUSIONES

Por tanto, se concluye que durante las actividades realizadas en el laboratorio de matemáticas, los estudiantes usan la herramienta para obtener un instrumento. Ellos son propositivos y aprendieron a usar GeoGebra para obtener significados matemáticos de los elementos del curso.

Es importante señalar, no todos los estudiantes logran la realización de las prácticas completas, las observaciones y los archivos no han permitido realizar conjeturas al respecto. En Silva & De-la-Torre (2011) se señala que es necesario realizar la investigación por más tiempo, para poder identificar los esquemas instrumentales de los estudiantes y así determinar si es la herramienta o son los conocimientos matemáticos los que provocan esa falta de realización.

Nota: Los trabajos finales de las prácticas de cada uno de los estudiantes se encuentran en geogebratube como colecciones. Ver Anexo para las direcciones de estas colecciones.

BIBLIOGRAFÍA

[1] De la Torre-Fernández, E. & Silva-Muslera, A. “Conceptualization of derivate using GeoGebra”. GeoGebra Conference 2009. Hagenberg, Austria, 2009.

[2] Guin, D. & Trouche, L. “Mastering by the teacher of the instrumental genesis in CAS environments: necessity of instrumental orchestrations”. Z D M. 34 (5), 2002.

[3] Hohenwarter, M. & Jones, K. Ways of linking geometry and algebra: the case of geogebra. Proceeding of the British Society for Research into Learning Mathematics, 27(3), 126-131. 2007.

[4] Maschietto, M. & Trouche, L. "Mathematics learning and tools from theoretical, historical and practical points of view: the productive notion of mathematics laboratories". Z D M. 42, 33-47, 2010.

[5] Rodríguez-Romero, M.M. "La identidad de la labor de asesoramiento y el proceso de construcción del rol de agente de apoyo. Un estudio de caso en educación tecnológica". PhPThesis. UNED. (sin publicar) 1992.

[6] Rutheven,K. "Teachers, techologies and the structures of schooling". In Proceedings of the conference of the European society for resarchin mathematics education. CERME. Cyprus. 2007.

[7] Silva-Muslera, A & De la Torre-Fernández, E. La herramienta arrastre en funciones usando Geogebra. En Marín, M.; Fernández, G.; Blanco,L.J.; Pararea,M. M. (Eds.), Investigación en Educación Matemática XV, SEIEM 555-564. España. 2011.

[8] Trouche, L. "Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learningenvironments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations". International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9(3), 281–307, 2004.

[9] Verillon, P. & Rabadel, P. "Cognition and artifact: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity". European Journal of Psychology in Education, 9(3), 77-101,1995.

Anexo

Direcciones de las colecciones realizadas por los estudiantes con los archivos del curso.

1 http://www.geogebratube.org/collection/show/id/4375

2 http://www.geogebratube.org/collection/show/id/4262

3 http://www.geogebratube.org/collection/show/id/4264

4 http://www.geogebratube.org/collection/show/id/4261

5 http://www.geogebratube.org/collection/show/id/4380

6 http://www.geogebratube.org/collection/show/id/4379

7 http://www.geogebratube.org/collection/show/id/4381

8 http://www.geogebratube.org/collection/show/id/4263

9 http://www.geogebratube.org/collection/show/id/4383

10 http://www.geogebratube.org/collection/show/id/4259