

# **Análisis de respuesta transitoria del sistema de suspensión de un automóvil mediante la analogía mecánico-eléctrica**

***Ma. Del Carmen Cornejo Serrano***

Instituto Tecnológico de Celaya. México.  
*carmencornejoserranol@gmail.com*

***Eloísa Bernardett Villalobos Oliver***

Instituto Tecnológico de Celaya. México.  
*eloisa.villalobos@itcelaya.edu.mx*

***Juan José Martínez Nolasco***

Instituto Tecnológico de Celaya. México.  
*juan.martinez@itcelaya.edu.mx*

***Diana García Tepetzotlán***

Instituto Tecnológico de Celaya. México.  
*solomatematicas@hotmail.com.*

***Edgar Rodrigo López Silva***

Instituto Tecnológico de Celaya. México.  
*refam\_93@hotmail.com.*

## **Resumen**

En este trabajo se presenta el modelado y desarrollo práctico de un sistema de suspensión de automóvil cuyo estudio se fundamenta en una analogía de sistemas dinámicos. Esta analogía nos permitió estudiar el comportamiento del sistema mecánico desde una perspectiva eléctrica, puesto que las ecuaciones diferenciales que rigen a ambos sistemas son matemáticamente equivalentes. Se analizó la respuesta en estado transitorio de la solución de la ecuación diferencial de segundo orden resultante del

modelo, estableciendo así cuál de las formas de la respuesta transitoria es la más adecuada para el sistema de suspensión estudiado.

**Palabra(s) Clave(s):** Analogía, respuesta transitoria, suspensión, análisis de sistemas mecánicos.

## **1. Marco teórico**

La modelación de sistemas dinámicos es el punto de partida para el diseño y análisis de sistemas de control en ingeniería; específicamente el análisis de circuitos complejos RLC que contienen elementos de almacenamiento de energía, tales como inductores y capacitores, son bastante útiles en la modelación de diversos dispositivos de uso cotidiano en situaciones prácticas sencillas, como son controladores de temperatura, osciladores y filtros de frecuencia, o mucho más complejas como el análisis de la respuesta de un avión a cambios en las posiciones de los elevadores y los alerones, o como en el caso que nos interesa en el presente trabajo, para el análisis de la respuesta transitoria de sistemas de suspensión de automóviles.

En el presente trabajo el diseño se enfoca al estudio comparativo con un sistema mecánico análogo. Antes de comenzar la descripción de la analogía de los sistemas, es conveniente mostrar los detalles de los circuitos eléctricos RLC. El modelado y análisis de este tipo de circuitos se representa comúnmente mediante sistemas dinámicos lineales de segundo orden, los cuales se modelan a través de una ecuación diferencial lineal de segundo orden de coeficientes constantes, la cual describe el comportamiento del sistema para cualquier voltaje o corriente que sea de interés conocer.

Hay dos tipos básicos de circuitos RLC: los conectados en paralelo y los conectados en serie. Para nuestros propósitos nos enfocaremos en los circuitos RLC en serie, sin fuente con el fin de determinar la respuesta natural de un modelo de circuito compuesto por una resistencia ideal, un inductor ideal y un capacitor ideal conectados en serie.

La resistencia ideal tal vez represente una resistencia física conectado a un circuito LC en serie, quizá también represente las pérdidas óhmicas y las pérdidas en el núcleo ferromagnético del inductor, o tal vez se use para representar todos los casos anteriores y otros dispositivos que absorben energía.

Si realizamos una suma de voltajes alrededor de la malla que se muestra en la figura 1, podemos obtener la ecuación integrodiferencial fundamental, mostrada en la ecuación 1, la cual podemos observar que es homogénea y por tanto no existe una fuente independiente de voltaje.

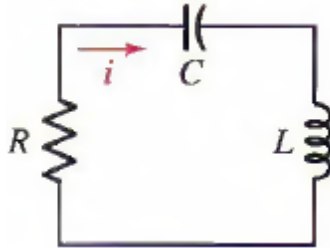


Figura 1 Circuito RLC en serie sin fuente.

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i dt + v_C(t_0) = 0 \quad (1)$$

Donde L representa la inductancia, R la resistencia, C la capacitancia e  $i(t)$  corresponde a la corriente en el circuito eléctrico mostrado en la figura 1.

Al derivar la ecuación 1, se obtiene la ecuación diferencial 2, la cual permite realizar el análisis tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia, a partir de la transformada de Laplace.

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0 \quad (2)$$

De acuerdo al valor de los parámetros L, R y C involucrados en la ecuación 2, la respuesta del sistema puede mostrar tres tipos de comportamiento: sobreamortiguado, críticamente amortiguado ó subamortiguado, como se muestra en la tabla 1. Se incluyen las definiciones del circuito RLC en paralelo, recordando que ambos circuitos son duales.

Es importante destacar que el comportamiento de un parámetro deseado en un circuito, depende inherentemente del valor que posean los componentes pasivos, así como también de la configuración implementada, ya sea en paralelo o en serie.

Tabla 1 Ecuaciones relevantes de los circuitos RLC sin fuente.

Ya que el análisis inicial depende únicamente del circuito RLC, restringiremos el análisis a los sistemas análogos, siendo nuestro propósito el estudio de un sistema mecánico a partir del modelo generado del sistema eléctrico. Los sistemas que pueden representarse mediante el mismo modelo matemático pero que son diferentes físicamente se llaman análogos. De esta manera, los sistemas análogos se describen mediante las mismas ecuaciones, ya sean diferenciales, integrodiferenciales o conjuntos de ecuaciones.

El concepto de sistema análogo es muy útil en la práctica por las siguientes razones:

- La solución de la ecuación que describe un sistema físico puede aplicarse directamente al sistema análogo en otro campo.
- Puesto que un tipo de sistema puede ser más fácil de manejar experimentalmente que otro, en lugar de construir y estudiar un sistema mecánico (o sistema hidráulico, sistema neumático, etc.), podemos construir y estudiar su análogo eléctrico, porque los sistemas eléctricos o electrónicos con en general, mucho más fáciles de tratar experimentalmente.

## Analogías mecánico-eléctricas

Los sistemas mecánicos pueden estudiarse mediante el uso de sus analogías eléctricas, los cuales pueden construirse más fácilmente que los modelos del sistema mecánico correspondiente. La analogía en la cual se basa la presente investigación es la que se muestra en la tabla 2.

Tabla 2 Analogías mecánico-eléctricas.

Sistema mecánico	Sistema eléctrico
$m$ , masa	L, inductancia
$b$ , coeficiente amortiguación	R, resistencia
$k$ , constante elástica del muelle	$\frac{1}{C}$ , inversa de la capacitancia
$x$ , desplazamiento	$i$ , intensidad

Para llegar a dicha conclusión, se notó que las ecuaciones diferenciales de los dos sistemas son idénticas, y por tanto se dice que estos dos sistemas son sistemas análogos. Es claro notar que los términos que ocupan las posiciones correspondientes en las ecuaciones diferenciales se llaman cantidades análogas.

## 2. Método

El diagrama masa-resorte-amortiguador mostrado en la figura 2, alude al modelo mecánico de traslación básico de un sistema de suspensión automotriz. Dicha abstracción, considera solo una cuarta parte del automóvil, es decir, se toma en cuenta uno de los cuatro neumáticos del auto en cuestión.

Como se puede observar, se trata de un sistema que tiene de dos grados de libertad. Se representa con la variable  $m_1$  a un cuarto de la masa suspendida del vehículo (soportada por los resortes), ésta contiene la masa del chasis y del motor. Las variables  $b_1$  y  $k_1$  corresponden al factor de amortiguamiento y a la rigidez de la suspensión, respectivamente. La masa no suspendida incluye los componentes que siguen las curvas de nivel de la carretera, tales como llantas, conjuntos de freno, y cualquier parte de la dirección y la suspensión no soportados por los muelles. Esta variable se denota

con  $m_2$ , en tanto que  $b_2$  y  $k_2$  son el amortiguamiento y la rigidez total de los componentes no suspendidos. La función de entrada al sistema es la fuerza  $f(t)$  ejercida por las alteraciones en el camino del auto, tales como grietas o baches. Esta perturbación provoca el desplazamiento de  $m_1$  y  $m_2$  denotados por  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  respectivamente, siendo medidos con respecto a la posición de equilibrio  $x(t)=0$ .

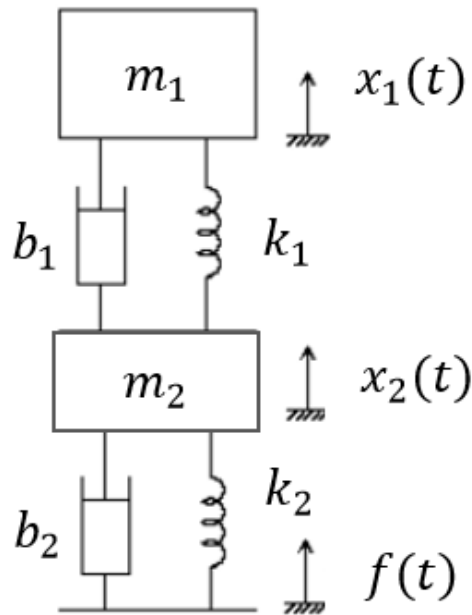


Figura 2 Modelo mecánico de un sistema de suspensión de un automóvil.

Previo a la determinación del modelo matemático del sistema se realizarán las siguientes simplificaciones.

- Debido a la significativa inercia del chasis se supondrá que este no experimenta desplazamiento alguno. Sin embargo,  $b_1$  y  $k_1$  sí tendrán efecto sobre  $m_2$ .
- Puesto que el enfoque del presente trabajo es el análisis de la respuesta del sistema después de una perturbación inicial, entonces  $f(t)=0$ .

El sistema, cuyo diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 3, debe mantenerse en equilibrio, por lo cual la sumatoria de fuerzas sobre la masa  $m$  – que corresponde al valor de  $m_1$  del sistema original – debe ser igual a cero.

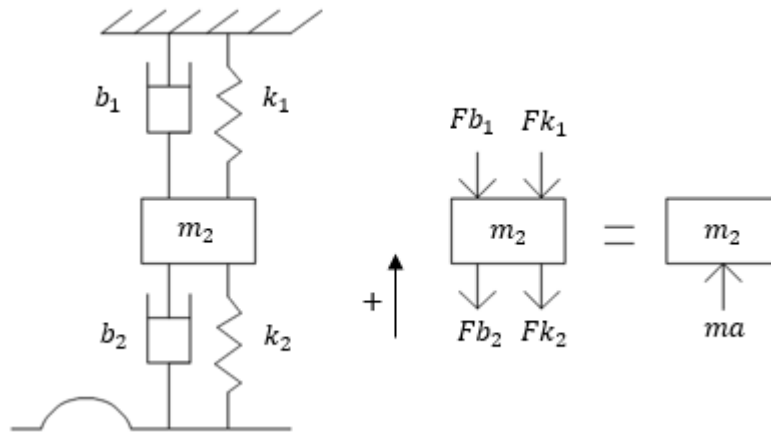


Figura 3 Diagrama de cuerpo libre de un sistema de suspensión de un automóvil simplificado.

Por segunda ley de Newton, se tiene

$$F = ma \quad (3)$$

La fuerza ejercida por el resorte y el amortiguador está dada por

$$F_{\text{resorte}} = kx \quad (4)$$

$$F_{\text{amortiguador}} = b \frac{dx}{dt} \quad (5)$$

Y debido a que el sistema está en equilibrio

$$\sum F = 0 \quad (6)$$

Se tiene entonces que

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -(b_1 + b_2) \frac{dx}{dt} - (k_1 + k_2)x \quad (7)$$

Por consiguiente, una ecuación diferencial de segundo orden homogénea describe el comportamiento del sistema de suspensión de un automóvil. Reacomodando la ecuación 7 se tiene

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + (b_1 + b_2) \frac{dx}{dt} + (k_1 + k_2)x = 0 \quad (8)$$

Este sistema mecánico traslacional, modelado por la ecuación 8, será representado ahora por un circuito RLC en serie sin fuente de excitación, puesto que la ecuación anterior no contempla una función de entrada o función forzante dependiente del tiempo. Aplicando las equivalencias correspondientes que se mostraron en la tabla 2, se obtiene la siguiente ecuación diferencial.

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + (R_1 + R_2) \frac{di}{dt} + \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) i = 0 \quad (9)$$

La figura 4 muestra la configuración del circuito RLC resultante.

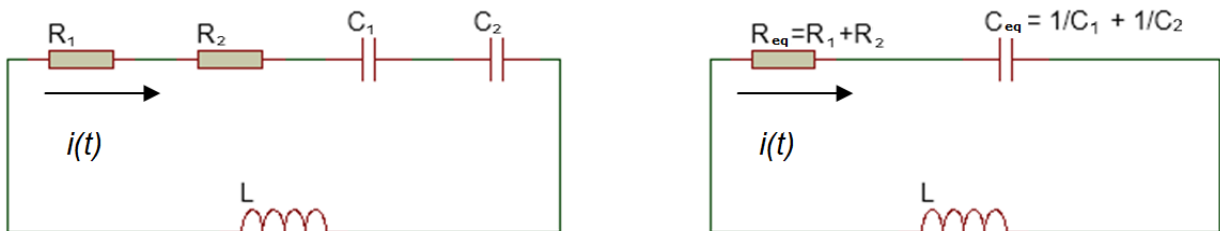


Figura 4 Circuito RLC.

### Análisis de un caso práctico

Para resolver la ecuación diferencial 8 – ó su equivalente 9 – se consideran los valores presentados en la tabla 3, que corresponden a los datos de un autobús convencional.

Tabla 3 Magnitudes de elementos de un sistema de suspensión de autobús convencional (1/4).

Parámetro	Magnitud
Masa de ¼ del auto (chasis y motor)	2500 kg
Constante de rigidez de la suspensión	80000 N/m
Constante de amortiguamiento de la suspensión	350 N s/m
Masa no suspendida del neumático	320 kg
Constante de rigidez del neumático	500000 N/m
Constante de amortiguamiento del neumático	15020 N s /m

Suponiendo las siguientes condiciones iniciales del sistema

$$i(0) = 0 \quad (10)$$

$$i'(0) = 5 \quad (11)$$



Sustituyendo los valores anteriores en la ecuación diferencial 9 se tiene

$$320\frac{d^2i}{dt^2} + 15370\frac{di}{dt} + 580000i = 0 \quad (12)$$

La ecuación diferencial 12 es lineal homogénea con coeficientes constantes, por lo cual se genera la siguiente ecuación auxiliar:

$$320m^2 + 15370m + 580000 = 0 \quad (13)$$

Donde las dos raíces de 13 son

$$m_1 = -24.015 + 35.153i \quad (14)$$

$$m_2 = -24.015 - 35.153i \quad (15)$$

Por consiguiente, la solución general de la ecuación diferencial 12 está dada por

$$i(t) = e^{-24.015t} (C_1 \cos(35.153t) + C_2 \text{sen}(35.153t)) \quad (16)$$

En la ecuación 16 se observa que la forma de respuesta del sistema es subamortiguada, para obtener la solución particular, se utilizan las condiciones iniciales 10 y 11. Al sustituir la condición 10 en la ecuación 16 se tiene

$$i(0) = e^{-24.015(0)} (C_1 \cos(35.153(0)) + C_2 \text{sen}(35.153(0))) = 0 \quad (17)$$

$$C_1 = 0 \quad (18)$$

Para encontrar el valor de  $C_2$ , se sustituye la condición 11 en la primera derivada de la ecuación 16 y se tiene

$$i'(t) = e^{-24.015t} 35.153C_2 \cos(35.153t) - 24.015C_2 e^{-24.015t} \text{sen}(35.153t) \quad (19)$$

Por lo tanto

$$C_2 = 0.142 \quad (20)$$

De manera que al sustituir 18 y 20 en 16 se tiene la solución particular del sistema descrito

$$i(t) = e^{(-24.015t)}(0.142\text{sen}(35.153t)) \quad (21)$$

En esta última expresión  $i(t)$  representa el desplazamiento que sufre la masa no suspendida del autobús debido a las perturbaciones en el pavimento.

Ahora bien, para el sistema RLC, en base a la variación de la resistencia equivalente ( $R_1 + R_2$ ), será modificada la forma de respuesta del mismo, por lo que a partir de las ecuaciones descritas en la tabla 1, se tiene lo siguiente:

- La naturaleza de la respuesta del sistema depende de la frecuencia resonante  $\omega_o$  y del coeficiente de amortiguamiento exponencial  $\alpha$ .
- Para un circuito RLC en serie se tiene

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad , \quad \alpha = \frac{R}{2L} \quad (22)$$

A continuación se muestran los tres posibles tipos de respuesta del sistema:

a) **Caso sobreamortiguado ( $\alpha > \omega_o$ )**

$$\frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (23)$$

O bien

$$R > \frac{2L}{\sqrt{LC}} \quad (24)$$

Donde para el caso en que

$$L = 320 \text{ H} \quad (25)$$

$$R_{eq} = 15370 \ \Omega \quad (26)$$

$$C_{eq} = (580000)^{-1} = 1.724 \mu\text{F} \quad (27)$$

Se tiene

$$R > 27248.108 \ \Omega \quad (28)$$

De la ecuación diferencial 12 obtenida, se llegó a la siguiente ecuación auxiliar

$$320m^2 + Rm + 580000 = 0 \quad (29)$$

Cuya solución se representa por

$$m_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 742400000}}{640} \quad (30)$$

Respetando el intervalo de R establecido, se observa la siguiente forma de respuesta como solución de (12)

$$i(t) = A_1 e^{m_1 t} + A_2 e^{m_2 t} \quad (31)$$

A partir de las condiciones iniciales (10) y (11) del sistema, al utilizarlas en (31) se tiene

$$A_1 = -A_2 = \frac{1600}{\sqrt{R^2 - 742400000}} \quad (32)$$

Entonces, la solución particular del circuito RLC para una forma de respuesta sobreamortiguada es

$$i(t) = \frac{1600}{\sqrt{R^2 - 742400000}} \left[ e^{\left(\frac{-R + \sqrt{R^2 - 742400000}}{640}\right)t} - e^{\left(\frac{-R - \sqrt{R^2 - 742400000}}{640}\right)t} \right] \quad (33)$$

**b) Caso críticamente amortiguado ( $\alpha = \omega_0$ )**

Para tener este tipo de respuesta se tiene que

$$\frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (34)$$

A la que corresponde  $R = 27248.108 \Omega$ . En consecuencia, las raíces de la ecuación auxiliar para la solución de la ecuación diferencial deben ser iguales.

$$m_{1,2} = -42.955 \quad (35)$$

Así, la solución general de la ecuación diferencial del sistema RLC es

$$i(t) = A_1 e^{m_1 t} + A_2 t e^{m_2 t} \quad (36)$$

De acuerdo las condiciones iniciales establecidas, la solución particular de la ecuación diferencial anterior es

$$i(t) = 5te^{-42.955t} \quad (37)$$

**c) Caso subamortiguado ( $\alpha < \omega_o$ )**

En este caso la resistencia equivalente debe tomar un valor

$$R < 27248.108 \Omega \quad (38)$$

La solución general de la ecuación diferencial que define al sistema RLC analizado en función del tiempo y la resistencia equivalente está dada por:

$$i(t) = e^{\frac{-Rt}{640}} \left[ A_1 \cos\left(\frac{\sqrt{742400000 - R^2}}{640} t\right) + A_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{742400000 - R^2}}{640} t\right) \right] \quad (39)$$

Cuya solución particular obtenida a partir de las condiciones iniciales (10) y (11) del sistema es

$$i(t) = e^{\frac{-Rt}{640}} \left[ \frac{5}{\frac{\sqrt{742400000 - R^2}}{640}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{742400000 - R^2}}{640} t\right) \right] \quad (40)$$

### 3. Resultados

En seguida se presenta una serie de gráficos que muestran la forma de respuesta transitoria del sistema RLC establecido. El protocolo de construcción para la evaluación de cada una de las respuestas a partir de Geogebra fue el siguiente:

- Evaluar la solución correspondiente al caso con el valor de resistencia equivalente.
- Ingresar dicha expresión como función de x, en la barra de entrada de Geogebra.

**a) Sistema subamortiguado:  $R < 27248.108 \Omega$**

De manera particular, los datos mostrados en la tabla 3 para el sistema de suspensión de un autobús consideran una resistencia equivalente igual a 15370  $\Omega$ . Por consiguiente, la forma de respuesta del sistema para  $t > 0$  es subamortiguada y la gráfica correspondiente se muestra en la figura 5. Se observa cómo la variación de la corriente (o desplazamiento de la masa  $m_1$  del sistema mecánico) se estabiliza en 0.2 segundos.

La ecuación 40 se teclea en la ventana de entrada en GeoGebra, como se muestra en la figura 6.

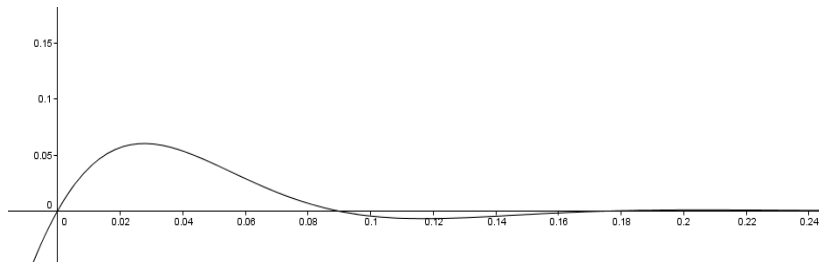


Figura 5 Respuesta sistema subamortiguado.

Figura 6 Ecuación (40) en GeoGebra.

b) *Sistema sobreamortiguado:  $R > 27248.108 \Omega$*

Se considera un valor  $R = 80000\Omega$ , lo que significa que el valor de la constante de amortiguamiento equivalente del sistema de suspensión ha de incrementarse casi tres veces más. En la figura 7 se muestra el comportamiento transitorio de la corriente o del desplazamiento para el sistema de segundo orden RLC o mecánico traslacional, respectivamente, para  $t > 0$ .

La ecuación de respuesta 33 se teclea en la ventana de entrada en GeoGebra, como se muestra en la figuras 8.

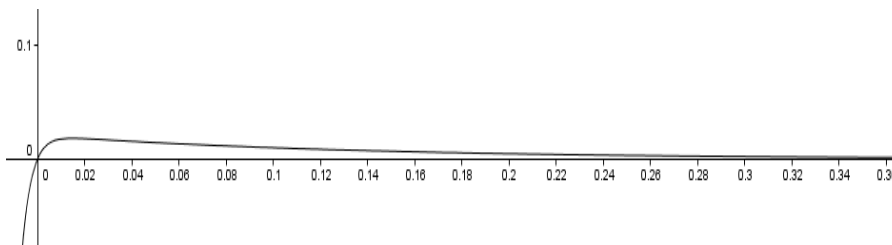


Figura 7 Respuesta sistema sobreamortiguado.

Figura 8 Ecuación (33) en GeoGebra.

c) *Sistema críticamente amortiguado*:  $R = 27248.108 \Omega$

La ecuación de respuesta 37 se teclea en la ventana de entrada en GeoGebra, como se muestra en la figura 9, y se muestra su gráfica en la figura 10.

Figura 9 Ecuación (37) en GeoGebra.

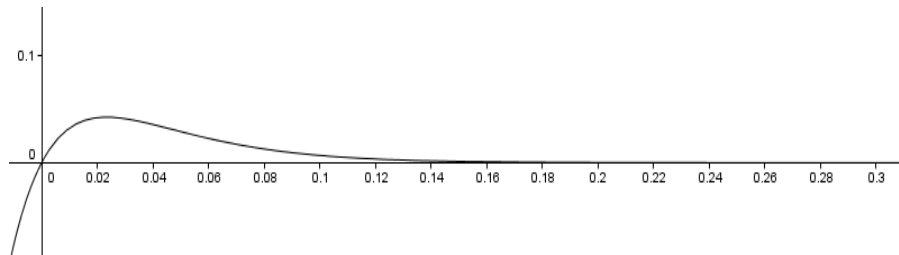


Figura 10 Respuesta sistema críticamente amortiguado.

#### 4. Discusión

Los resultados obtenidos del sistema de suspensión indican una respuesta subamortiguada, que en la vida diaria con dichos parámetros equivaldría a un comportamiento con uno o dos rebotes después de que algún neumático del automóvil pasara por cualquier perturbación no insignificante en el terreno.

Es importante mencionar que al aumentar la resistencia del circuito o bien al aumentar el coeficiente de fricción viscosa se obtiene una respuesta sobreamortiguada, lo que resultaría en una mayor estabilidad al tomar las curvas a mayor velocidad. No obstante, si la mayor parte de los recorridos en automóvil se realizan sobre trayectorias no pavimentadas o con una gran cantidad de baches, es mucho más adecuada una respuesta transitoria subamortiguada por lo anteriormente mencionado.

#### 5. Conclusiones

El desarrollo de este trabajo permite la introducción en el modelado de sistemas complejos a partir de sistemas simples mediante el concepto de sistema análogo. Además la versatilidad que tiene dicha metodología en el diseño y análisis de sistemas de control en ingeniería, nos permite comparar y entender el comportamiento de un sistema mecánico a partir de su análogo eléctrico, y del mismo modo entender que la

ventaja de trabajar con un sistema eléctrico es su factibilidad de estudiar experimentalmente en comparación del sistema de suspensión del automóvil en físico. Sin duda uno de los aspectos primordiales de este tipo de análisis es la capacidad indudable de modelar diversos sistemas físicos mediante el uso de ecuaciones diferenciales sin la necesidad de restringir las respuestas de los sistemas a una única área de estudio.

## **Bibliografía**

- [1] W. H Hayt (Jr), J. E. Kemmerly. Análisis de circuitos en ingeniería. 7ª edición. 2007. Mc Graw Hill. México.
- [2] Cornejo C., Villalobos E., Quintana P. Métodos de solución de ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones. 2008. Editorial Reverté. México.
- [3] GEOGEBRA. ©2014 International Geogebra Institute. Recuperado el 30 de septiembre de 2014 en: <http://www.geogebra.org>.