



## **Metodología para la obtención de la curva esfuerzo-deformación usando el método de elemento finito inverso IFEM con pruebas Small Punch**

**Elías Daniel Valadez González**

*Tecnológico Nacional de México / IT de  
Celaya,  
Celaya, Guanajuato, México*

**Luis Alejandro Alcaraz Caracheo \***

*Tecnológico Nacional de México / IT de  
Celaya,  
Celaya, Guanajuato, México*

**Israel Aguilera Navarrete**

*Centro de Innovación Aplicada en  
Tecnologías Competitivas,  
León de los Aldama, Guanajuato, México*

**Juan Manuel Prado Lázaro**

*Universidad Michoacana de San Nicolás de  
Hidalgo,  
Morelia, Michoacán, México*

\* Autor de correspondencia: [alejandro.alcaraz@itcelaya.edu.mx](mailto:alejandro.alcaraz@itcelaya.edu.mx)

---

**Resumen:** *En este trabajo se presenta una metodología para modelar la curva esfuerzo-deformación a partir de los datos obtenidos mediante la prueba de Small Punch Test (SPT). La estrategia consiste en establecer una correlación entre la curva carga-desplazamiento característica de la SPT y los parámetros de la ecuación constitutiva de Johnson-Cook, ampliamente utilizada para modelar la curva esfuerzo-deformación. Esta correlación se construye empleando el método de Elemento Finito Inverso (Inverse Finite Element Method, IFEM), lo que permite estimar parámetros que no pueden ser determinados directamente a través de la prueba SPT. A través de esta metodología es posible identificar propiedades mecánicas fundamentales del material, tales como el efecto de endurecimiento por deformación, la sensibilidad a la velocidad de deformación y los efectos térmicos, factores que influyen significativamente en su respuesta estructural y que no pueden ser determinados de manera directa con la SPT convencional.*

**Palabras clave:** Ecuación constitutiva, ecuación de Johnson-Cook, endurecimiento por deformación, IFEM, Small Punch Test.

---

## **1. Introducción: lo que debemos saber de inicio**

Cuando el volumen de material disponible es limitado o su manipulación resulta compleja para la realización de ensayos mecánicos convencionales, se recurre a técnicas de ensayo en muestras pequeñas (*Small Specimen Test Techniques*, SSTT). Dentro de estas técnicas, la *Small Punch Test* (SPT) ha sido ampliamente utilizada para la caracterización de materiales delgados (Nabgan et al. 2023, Torres & Gordon, 2021), irradiados (Gatto & Montrasio, 2023), soldados (Aljohani et al., 2021), de baja resistencia (Yang et al., 2020), sometidos a fatiga mecánica (Zhang, 2022), así como en la técnica de las tres bolas (B3B) (Yamanaka et al., 2020), simulaciones mediante el método de elementos finitos (FEM) (Said, 2023) y, más recientemente, en combinación con redes neuronales artificiales (ANNs) (Morsy et al., 2022). La técnica de Small Punch permite, a partir de la curva carga-desplazamiento, obtener correlaciones con propiedades mecánicas fundamentales como el esfuerzo de fluencia (punto en que el material deja de comportarse elásticamente) y el esfuerzo último a la tensión (punto en que el material inicia su fractura bajo carga). Sin embargo, presenta limitaciones en el modelado completo de la curva esfuerzo-deformación característica de un ensayo de tensión convencional. Ante esta limitación, en el presente trabajo se propone una metodología para modelar la curva esfuerzo-deformación a partir de la curva carga-desplazamiento obtenida en pruebas SPT. Este objetivo se alcanza mediante el cálculo del esfuerzo y la deformación equivalentes, aplicando la teoría de membranas de Chakrabarty (una simplificación matemática que describe cómo se distribuyen las tensiones en materiales delgados bajo cargas, como si fueran una membrana flexible) (Ragab et al., 2022), cuyos resultados se comparan con aquellos obtenidos a través del método inverso de elementos finitos (IFEM). El método IFEM consiste en obtener los parámetros del material “al revés”, es decir, en vez de calcular qué pasa con un material cuando se le aplican cargas conocidas (como en un análisis directo), aquí se parte del resultado (la deformación) para descubrir las propiedades del material, es como deducir la receta de un platillo solo con probarlo.

La metodología incluye el uso del algoritmo iterativo de Levenberg-Marquardt (LM, una técnica numérica que permite ajustar curvas cuando la relación entre variables no es lineal, comúnmente usada para resolver problemas de optimización en ingeniería) (Aljohani et al., 2021) y la implementación de la ecuación constitutiva de Johnson-Cook, ampliamente utilizada en los modelos de simulación para describir el comportamiento esfuerzo-deformación. La correlación obtenida permitirá identificar parámetros fundamentales como el endurecimiento por deformación, los efectos de la velocidad de deformación y la influencia de la temperatura, fenómenos relevantes que no se pueden determinar durante la ejecución de la prueba SPT.

## 2. Fundamentos Teóricos: reglas y principios científicos importantes

La prueba de *Small Punch Test* (SPT) consiste en fijar entre dos matrices, la periferia de la probeta de dimensiones de 8 mm de diámetro por 0.5 mm de espesor, con el fin de deformar la probeta hasta su ruptura, utilizando el punzón con cabeza semiesférica como se muestra en la Figura 1.

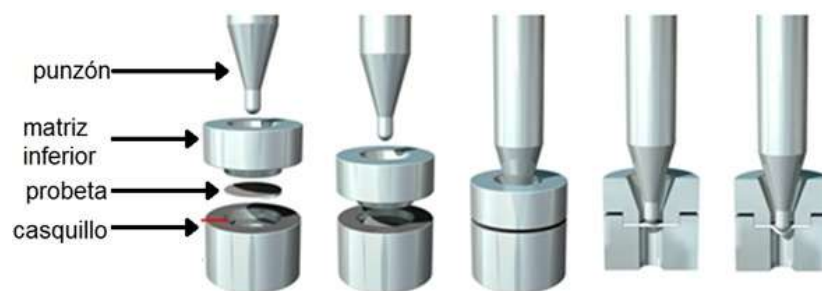


Figura 1. Prueba de Small Punch.

*Obtenida de: (Lancaster et al., 2022).*

Durante el proceso de deformación de la probeta en la prueba de Small Punch, se registran los valores de fuerza aplicada y desplazamiento. Con estos se genera la gráfica representada en la Figura 2. Esta gráfica proporciona información crucial sobre las diferentes zonas de deformación del material, permitiendo analizar su comportamiento y características mecánicas.

El modelo de Johnson-Cook (JC) es un modelo empírico ampliamente utilizado para predecir la respuesta de los materiales bajo altas tasas de deformación. Este modelo

incorpora varios términos para capturar la respuesta del material ante la deformación, tales como el endurecimiento por deformación, la dependencia de la tasa de deformación y los efectos de la temperatura. Estos elementos están representados en la ecuación 1 (Kuliiev et al., 2024).

$$\sigma_{eq}(\epsilon_p, \dot{\epsilon}_p, T) = [A + B(\epsilon_p)^n] \left[ 1 + C \ln \left( \frac{\dot{\epsilon}_p}{\dot{\epsilon}_{p0}} \right) \right] [1 - T^m] \quad (1)$$

Donde:

$[A + B(\epsilon_p)^n]$  endurecimiento por deformación.

$\left[ 1 + C \ln \left( \frac{\dot{\epsilon}_p}{\dot{\epsilon}_{p0}} \right) \right]$  Dependencia de la tasa de deformación.

$[1 - T^m]$  Efectos de temperatura.

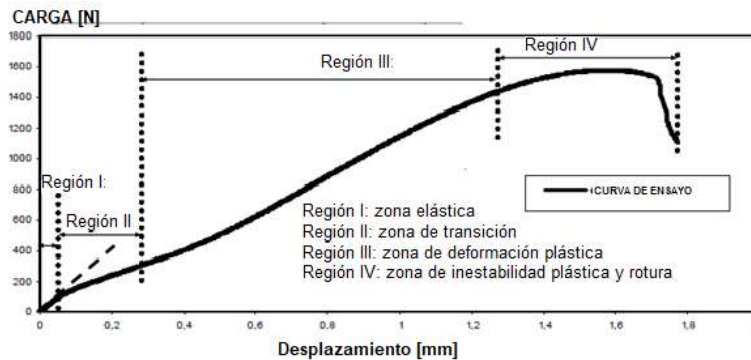


Figura 2. Gráfica de SPT, carga-desplazamiento.

*Obtenida de: elaboración propia*

Jang et al. (2023) realizaron una investigación utilizando la barra de Hopkinson, encontrando los parámetros de la ecuación de Johnson-Cook (A, B, C, n y m) mediante el método de Elemento Finito Inverso (IFEM). Comprobaron, mediante pruebas experimentales con el ensayo Charpy, la correlación entre estos parámetros. Por su parte, Li et al. (2018) identificó la correlación entre los parámetros de la ecuación constitutiva de Hollomon y la prueba de SPT mediante la técnica de IFEM, construyendo la curva esfuerzo-deformación con dichos parámetros. Se ha trabajado con estos datos explorando la simulación mediante el método de elemento finito inverso (IFEM). Este método consiste en determinar los valores de entrada a partir de los valores de respuesta de la simulación. Tantideeravit y Kamaya (2020) desarrollaron la metodología de elemento finito inverso, incorporando un proceso iterativo

de bisección y el modelo constitutivo de Ludwik para encontrar el trabajo de endurecimiento de aceros al carbono mediante SPT. La metodología de este trabajo se ilustra en la Figura 3, iniciando con la prueba de SPT después aplicando la teoría de membranas para obtener la curva esfuerzo-deformación equivalente. En el siguiente paso se comienza con la iteración de los datos de Johnson-Cook utilizando el método de Levenberg-Marquardt (LM) (Aljohani et al., 2021) conocido por su ajuste de curvas cuando la función no es perfectamente lineal respecto a los parámetros. El método LM ajusta automáticamente entre un enfoque más conservador (gradiente descendente) y uno más rápido (Gauss-Newton), lo que lo hace ideal para este tipo de problemas. Obteniendo los datos de JC se ingresan a la simulación para generar la curva esfuerzo-deformación y así encontrar la curva que corresponde a estos valores.

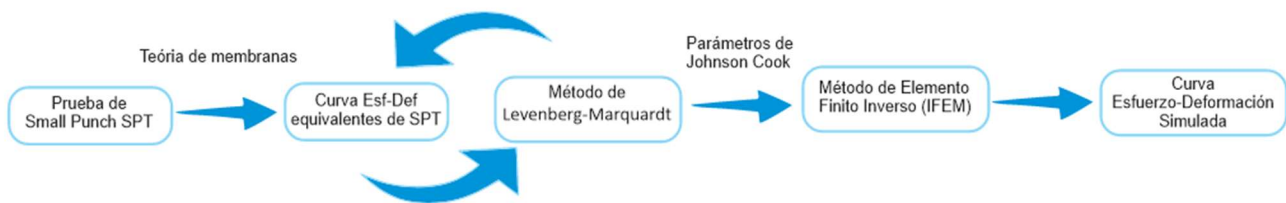


Figura 3. Metodología.

*Obtenida de: elaboración propia.*

### 3. Desarrollo del Trabajo: *aplicando las reglas y principios científicos*

Para nuestro estudio inicialmente, se utilizaron valores de los parámetros de la ecuación de Johnson-Cook reportados en la literatura (Tekkaya et al., 2020; Murugesan & Jung, 2019; Sasso et al., 2008; Buchely et al., 2019) para el material AISI 1045 normalizado y sin tratamiento térmico. De esta manera, se inician las iteraciones para encontrar los valores coincidentes con los resultados obtenidos en las pruebas de SPT realizadas al material. Sin embargo, para establecer esta relación, es necesario determinar la gráfica equivalente esfuerzo-deformación ( $\sigma_{eq} - \epsilon_{eq}$ ) a partir de la gráfica carga-desplazamiento de la prueba Small Punch.

Para la conversión de datos de carga-desplazamiento a esfuerzo-deformación en pruebas Small Punch a temperatura ambiente, se emplea un enfoque basado en el área efectiva de contacto ( $A_{eff}$ ). Este enfoque se fundamenta en la teoría de membranas, que describe la

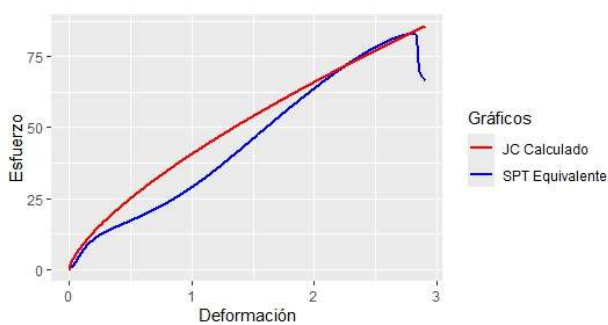
distribución de tensiones en materiales delgados sometidos a carga centrada (Ragab et al., 2022). Además, estudios empíricos previos han demostrado la efectividad de esta aproximación en pruebas Small Punch convencionales (Kim et al., 2025; Lancaster et al., 2019; Holmström et al., 2019; Kim et al., 2024), donde el esfuerzo equivalente se calcula mediante la relación  $\sigma_{eq} = F/A_{eff}$ , siendo  $A_{eff} = \pi d^2/4$  el área de contacto inicial. Este método ha sido validado en condiciones de temperatura ambiente y proporciona una estimación aproximada del comportamiento de los materiales en el SPT.

La Tabla 1, muestra los valores obtenidos de la literatura y los generados en las iteraciones para el material AISI 1045 normalizado (etiqueta 1045 N) y sin tratamiento térmico (etiqueta 1045 ST).

Tabla 1. Valores de Johnson Cook AISI 1045.

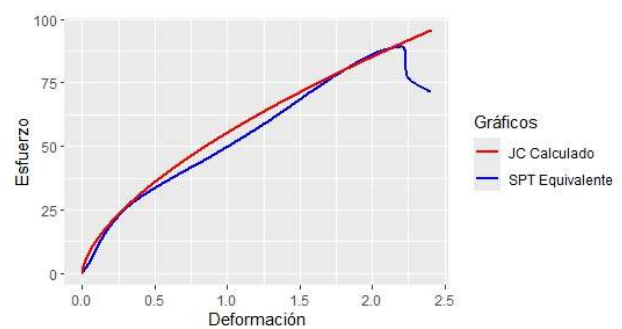
Parámetros	Valores de la literatura	Valores Iterados 1045 N	Valores Iterados 1045 ST
A [MPa]	50.103	10	2.95
B [MPa]	176.091	31.5	52.34
C	0.1056	0.02	0.046
n	0.5176	0.7	0.632
m	0.5655	0.75	1.75

*Obtenida de: elaboración propia.*



a) AISI 1045 Normalizado.

*Obtenida de: elaboración propia.*



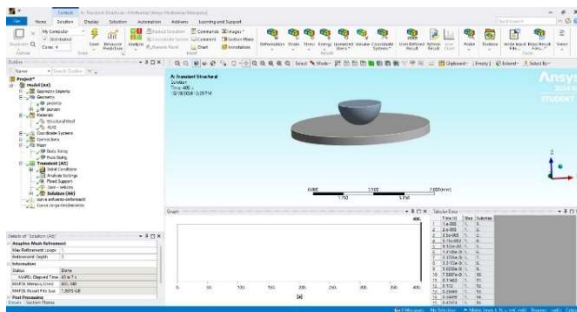
b) AISI 1045 Sin tratamiento térmico.

*Obtenida de: elaboración propia.*

Figura 4. Ensayo de SPT para el acero AISI 1045, a) Normalizado, b) Sin tratamiento térmico.

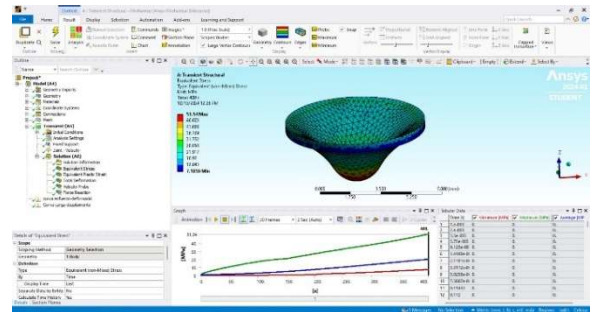
Luego del proceso iterativo, se obtiene la gráfica  $(\sigma_{iter} - \epsilon_{iter})$  mediante la ecuación de Johnson-Cook (JC), la cual se compara con la gráfica esfuerzo-deformación equivalente  $(\sigma_{eq} - \epsilon_{eq})$  obtenida de la prueba SPT. Esto se muestra en la Figura 4, donde la curva azul representa los resultados de la prueba SPT equivalentes y la curva roja muestra la aproximación obtenida a través del proceso iterativo.

Para el IFEM, se utilizó el módulo *Explicit Dynamics* de *Ansys Workbench*, donde se incorporaron los datos generados de la ecuación JC. Se efectúa la simulación de la prueba de SPT, obteniendo la curva esfuerzo- deformación, como se ilustra en la Figura 5.



a) Ingreso de los parámetros.

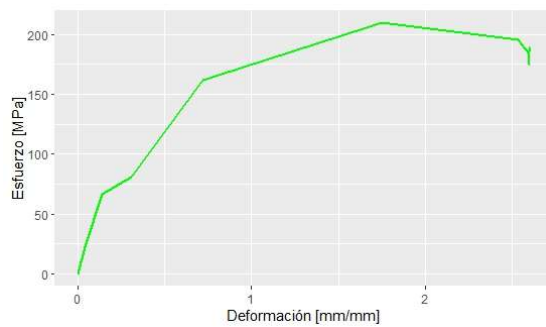
*Obtenida de: elaboración propia.*



b) Simulación.

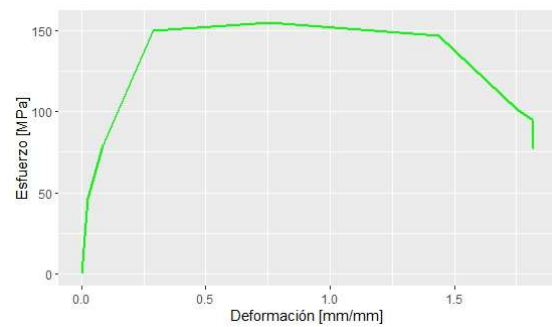
*Obtenida de: elaboración propia.*

Figura 5. Simulación de la prueba de Small Punch.



a) Simulación AISI 1045 N.

*Obtenida de: elaboración propia.*



b) Simulación AISI 1045 ST.

*Obtenida de: elaboración propia.*

Figura 6. Gráficas de la simulación del acero AISI 1045.

Los resultados obtenidos de la simulación son comparados con las pruebas reales de SPT, al generar curvas carga-desplazamiento semejantes, se prosigue con el modelado de la curva

esfuerzo-deformación, estableciendo de esta manera la correlación entre las dos curvas mediante los valores de JC. La Figura 6 muestra la gráfica esfuerzo-deformación obtenida para el acero 1045 a) normalizado y b) sin tratamiento térmico generada por medio de la simulación.

#### **4. Conclusiones: lo que podemos aprender de este artículo**

El presente trabajo se muestra la metodología para modelar la curva esfuerzo-deformación a partir de los resultados de la prueba Small Punch Test (SPT) para el material AISI 1045, sin embargo, este método no está limitado a este material, mediante el uso combinado de la teoría de membranas, la ecuación constitutiva de Johnson-Cook y el método de Elemento Finito Inverso (IFEM). Esta metodología permite complementar la prueba SPT convencional, al posibilitar la estimación de parámetros mecánicos críticos como el endurecimiento por deformación, la sensibilidad a la tasa de deformación y los efectos térmicos, que no pueden ser determinados de manera directa por esta técnica. Los resultados obtenidos para el acero AISI 1045, tanto en condición normalizada como sin tratamiento térmico, muestran una buena correlación entre la curva esfuerzo-deformación equivalente derivada experimentalmente y la obtenida mediante simulación en Ansys Explicit Dynamics, con parámetros iterados mediante el algoritmo de Levenberg-Marquardt. Esta validación respalda la robustez del enfoque adoptado y su aplicabilidad en la caracterización de materiales con geometrías y volúmenes reducidos. En general, la metodología propuesta representa una herramienta útil y precisa para la caracterización mecánica avanzada de materiales, especialmente en contextos donde el material disponible es limitado o se requiere evitar ensayos destructivos convencionales.

La metodología propuesta tiene implicaciones prácticas significativas en contextos industriales y de investigación donde el volumen de material es limitado o los ensayos destructivos son inviables. Ejemplos concretos incluyen:

- La evaluación de componentes estructurales envejecidos en sectores como el nuclear y el aeroespacial.
- El control de calidad en piezas soldadas, recubiertas o tratadas térmicamente.
- La caracterización de biomateriales donde la muestra disponible es mínima.

Al permitir la estimación indirecta de propiedades mecánicas a partir de pruebas simples y con mínimas muestras, esta metodología representa una herramienta útil para decisiones de mantenimiento predictivo, diseño de componentes y evaluación de integridad estructural.

## **5. Referencias: *por si quieres seguir conociendo más***

- Aljohani, J. L., Alaidarous, E. S., Zahoor Raja, M. A., Alhothuali, M. S., & Shoaib, M. (2021). Backpropagation of Levenberg Marquardt artificial neural networks for wire coating analysis in the bath of Sisko fluid. *Ain Shams Engineering Journal*, 12(4), 4133–4143. <https://doi.org/10.1016/j.asej.2021.03.007>
- Gatto, M. P. A., & Montrasio, L. (2023). Artificial neural network model to predict the dynamic properties of sand-polyurethane composite materials for GSI applications. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 172, 108032. <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2023.108032>
- Morsy, A. M., Elmoaty, A. E. M. A., & Harraz, A. B. (2022). Predicting mechanical properties of engineering cementitious composite reinforced with PVA using artificial neural network. *Case Studies in Construction Materials*, 16, e00998. <https://doi.org/10.1016/j.cscm.2022.e00998>
- Nabgan, W., Ikram, M., Alhassan, M., et al. (2023). Bibliometric analysis and an overview of the application of the non-precious materials for pyrolysis reaction of plastic waste. *Arabian Journal of Chemistry*, 16(6), 104717. <https://doi.org/10.1016/j.arabjc.2023.104717>
- R. Kuliiev, S. Keller y N. Kashaev. (2024). Identification of Johnson-Cook material model parameters for laser shock peening process simulation for AA2024, Ti-6Al-4V and Inconel 718. *Journal of Materials Research and Technology*, 28, 1975-1989. <https://doi.org/10.1016/j.jmrt.2023.11.168>
- R. Lancaster, S. Jeffs, B. Haigh y N. Barnard. (2022). Derivation of material properties using small punch and shear punch test methods. *Materials & Design*, 215, 110473. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2022.110473>.
- R. Ragab, T. Liu, M. Li y W. Sun. (2022). Membrane stretching based creep damage analytical solutions for thin disc small punch problem. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 165, 104928. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2022.104928>
- Said, B. E. (2023). Predicting the non-linear response of composite materials using deep recurrent convolutional neural networks. *International Journal of Solids and Structures*. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2023.112334>
- T. J. Jang, J. W. Yoon y J.-B. Kim. (2023). Determination of Johnson-Cook constitutive model coefficients considering initial gap between contact faces in SHPB test. *Journal of Materials Research and Technology*, 24, 7242-7257. <https://doi.org/10.1016/j.jmrt.2023.05.001>

- Torres, J., & Gordon, A. P. (2021). Mechanics of the small punch test: A review and qualification of additive manufacturing materials. *Journal of Materials Science*, 56(18), 10707–10744. <https://doi.org/10.1007/s10853-021-05929-8>
- Yamanaka, A., Kamijyo, R., Koenuma, K., Watanabe, I., & Kuwabara, T. (2020). Deep neural network approach to estimate biaxial stress-strain curves of sheet metals. *Materials & Design*, 195, 108970. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2020.108970>
- Yang, C., Kim, Y., Ryu, S., & Gu, G. X. (2020). Prediction of composite microstructure stress-strain curves using convolutional neural networks. *Materials & Design*, 189, 108509. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2020.108509>
- Zhang, Z. (2022). Predicting stress–strain curves using transfer learning: Knowledge transfer across polymer composites. *Materials & Design*. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2022.110700>