



Solución de ecuaciones diferenciales ordinarias por colocación ortogonal en microcontrolador PIC

Mario Alberto Sandoval Hernández

Centro de Bachillerato Tecnológico industrial
y de servicios No. 190,
Boca del Río, Veracruz, México

Fernando Iván Molina Herrera

Tecnológico Nacional de México / IT de
Celaya,
Celaya, Guanajuato, México

Hugo Jiménez Islas *

Tecnológico Nacional de México / IT de
Celaya,
Celaya, Guanajuato, México

Luis Isaí Quemada Villagómez

Tecnológico Nacional de México / IT de
Celaya,
Celaya, Guanajuato, México

* Autor de correspondencia: hugo.jimenez@itcelaya.edu.mx

Resumen: En este artículo se presenta una experiencia educativa que combina matemáticas, programación y electrónica. Se resolvió una ecuación diferencial con condiciones en la frontera utilizando el método de colocación ortogonal, implementado en un microcontrolador PIC18F4620 con lenguaje C. Los resultados se visualizaron en una pantalla gráfica de 128×64 píxeles y se compararon con la solución exacta. El proyecto incluye la creación de matrices matemáticas esenciales A, B, C, D, Q^{-1} , y utiliza las raíces de los polinomios de Legendre, que fueron organizadas en una tabla para facilitar su acceso durante los cálculos. El sistema puede generar las matrices necesarias para distintos casos, apoyándose en los polinomios $P_1(x)$ - $P_8(x)$. Esta propuesta busca acercar herramientas avanzadas a estudiantes, mostrando cómo resolver problemas complejos con tecnología accesible.

Palabras clave: Análisis numérico, colocación ortogonal, ecuaciones diferenciales ordinarias, lenguaje de programación C, Microcontrolador PIC.

1. Introducción: *lo que debemos saber de inicio*

Las ecuaciones diferenciales con condiciones en la frontera son importantes porque describen el comportamiento de fenómenos físicos, así como el comportamiento de sistemas. Por ejemplo, se puede modelar el comportamiento de una cuerda (Burden y Faires, 2011), entre otros. Asimismo, la ecuación de onda y la ecuación de calor requieren el uso de condiciones a la frontera para modelar y describir su comportamiento. Las condiciones de frontera conocidas son las de Dirichlet, Neumann, Cauchy y Robin.

El método de colocación ortogonal es un método numérico que tiene el fin de resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales con valores a la frontera y es un método conocido en la literatura de ingeniería Química (Jiménez-Islas, y López-Isunza, F. 1994; Finlayson, 1981; Villadsen y Stewart, 1967; Villadsen y Michelsen, 1978). El método se basa en utilizar las raíces de los polinomios de Legendre y de la generación de las matrices A, B, C, D, Q^{-1} , donde las matrices A, B implementan la primera y segunda derivada respectivamente, mientras que la matriz C contiene los valores de los polinomios de base de Legendre evaluados en los puntos de colocación. La matriz D se utiliza para evaluar derivadas de la función aproximada en los extremos del dominio, es decir, en los puntos de frontera donde se imponen condiciones adicionales. La matriz Q^{-1} es la inversa de una matriz de pesos utilizada en el método. Esta matriz aparece cuando se aplican integraciones o productos internos dentro del método de colocación. Al invertirla, se facilita la resolución del sistema de ecuaciones resultante.

Una vez que se discretizan las ecuaciones diferenciales, éstas se transforman en ecuaciones algebraicas que pueden ser lineales o no lineales, según de las características de las ecuaciones diferenciales, y para resolverlas es necesario un algoritmo numérico como sobre-relajación o Newton-Raphson (Burden y Faires, 2011). Existen distintos programas para implementar estos algoritmos numéricos, entre los que destacan Fortran, C, Python, Excel, R, entre otros.

El lenguaje C puede considerarse como un lenguaje de programación universal porque entendiéndolo su estructura facilita el aprendizaje de otros lenguajes de programación como C++, Java, Delphi, etc. Asimismo, este lenguaje permite gestionar algoritmos con diferentes propósitos en distintos sistemas operativos como MS-DOS, Linux y Windows. En ese sentido, los dispositivos embebidos que contienen microcontroladores con distinta arquitectura, como PIC (*Programmable Integrated Circuit*), ARM (*Advanced RISC Machine*), e Intel 8051,

los cuales pueden programarse utilizando C. Aunque los microcontroladores tienen amplias aplicaciones en la electrónica (Clavijo, 2011), en este trabajo se presenta la solución de una ecuación diferencial ordinaria lineal resuelta con Colocación ortogonal con el microcontrolador PIC18f4620 (Microchip, 2008) como hardware. Este trabajo tiene el propósito de resignificar el discurso matemático escolar (Sandoval-Hernández et al, 2021) motivando a los estudiantes a explorar otras alternativas de implementación, generando un acceso universal al conocimiento con otras perspectivas.

2. Fundamentos Teóricos: reglas y principios científicos importantes

El método de colocación ortogonal consiste en aproximar una función y sus derivadas usando puntos de colocación que provienen de las raíces de los polinomios de Legendre. A partir de estas raíces se construyen matrices que permiten calcular derivadas de manera numérica. Las expresiones para aproximar la primera y segunda derivada mediante la colocación ortogonal están dadas por las sumatorias

$$\frac{dT}{dx} = \sum_{k=1}^{NX+2} AX_k T_k \quad (1)$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \sum_{k=1}^{NX+2} BX_k T_k \quad (2)$$

Donde las matrices A y B son las matrices de colocación y NX+2 son los puntos de colocación utilizados, dados por las raíces de los polinomios de Legendre, más las fronteras. Para obtener estas matrices se tiene

$$A = CQ^{-1} \quad (3)$$

$$B = DQ^{-1} \quad (4)$$

Las matrices $ABCDQ^{-1}$ se encuentran en función de las raíces de los polinomios de Legendre, los cuales pueden generarse a partir de la fórmula de Rodrigues, dada por la fórmula

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (5)$$

En (Finlayson, 1981; Villadsen y Michelsen, 1978) se presentan los detalles numéricos para generar las matrices utilizadas en colocación ortogonal.

3. Desarrollo del Trabajo: *aplicando las reglas y principios científicos*

El caso de estudio propuesto es una ecuación diferencial ordinaria dada por

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) - 2\frac{d}{dx}y(x) + 1 = 0 \quad (6)$$
$$y(0) = 0, y'(1) = 1$$

Con solución analítica exacta

$$y(x) = \frac{e^{2x} - 1}{4e^2} + \frac{x}{2} \quad (7)$$

La metodología fue llevada a la práctica utilizando una tarjeta de desarrollo EasyPIC V7 Connectivity, junto con el programa MikroC, que permite escribir y cargar instrucciones al microcontrolador. En este caso se utilizó el modelo PIC18F4620, un pequeño chip que funciona como el "cerebro" del sistema y que cuenta con 64 kilobytes de memoria para guardar instrucciones, 5 puertos de entrada y salida, 4 temporizadores y otros elementos que lo hacen muy versátil. Para mostrar los resultados, se conectó una pantalla gráfica de 128x64 píxeles, controlada por un chip llamado KS0108, que permite visualizar texto e imágenes sencillas. La Figura 1 muestra la tarjeta utilizada.



Figura 1 Tarjeta de desarrollo utilizada.

Obtenida de: elaboración propia.

Para poner en marcha el método de colocación ortogonal, se almacenaron previamente las raíces de los primeros ocho polinomios de Legendre, $P_1(x), \dots, P_8(x)$, en una matriz de tamaño 8×10 . Estas raíces son valores especiales que se usan como puntos de referencia para construir la solución aproximada. Cuando se necesita generar las matrices del método, el programa toma de esa tabla las raíces correspondientes al orden deseado. En el caso de estudio presentado, se usaron tres puntos de colocación, es decir, se eligieron las raíces del polinomio de Legendre de tercer orden. Además, al incluir las condiciones de frontera, se formó un sistema de cinco ecuaciones con cinco incógnitas. Para resolver este sistema se utilizó el método de Newton-Raphson, una técnica numérica que ajusta los valores paso a paso hasta encontrar la solución. En el proceso también se aplicó una descomposición LU, el cual es un método para factorizar una matriz cuadrada en dos matrices triangulares: una triangular inferior (L) y una triangular superior (U), con el fin de facilitar el cálculo de la inversa de la matriz Jacobiana, una parte clave del cálculo. Además, se utilizó un criterio de tolerancia $\Delta x = 1 \times 10^6$ tanto para las derivadas como para decidir cuándo detener el cálculo, asegurando así que el resultado fuera suficientemente preciso. La Figura 2 muestra, en la pantalla gráfica, la comparación entre la solución exacta y los tres puntos de colocación obtenidos por el método.

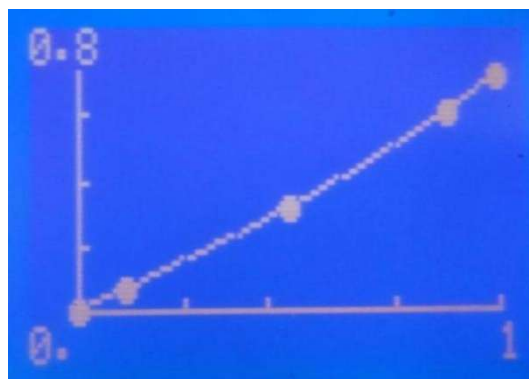


Figura 2 Demostración de la librería creada en Maple 2021.

Obtenida de: elaboración propia.

La Tabla 1 muestra una comparación de los valores de los puntos de colocación obtenidos con el sistema basado en microcontrolador contra la solución implementada en Maple 2021 y la solución exacta de la ecuación diferencial.

De la Tabla 1 puede notarse que la solución obtenida con el microcontrolador PIC es la misma que la que se obtuvo con Maple 2021. Véase en este caso de estudio, el error absoluto disminuye conforme nos alejamos del primer punto de colocación.

Tabla1. Comparación de los puntos de colocación.

Valores de x	Valores de y PIC	Valores de y Maple	Valor exacto de y	Error absoluto PIC vs exacto
0	0.000000	0.000000	0	0
0.112702	0.065006	0.065006	0.064905	8.99×10^{-4}
0.500000	0.308277	0.308277	0.308136	1.41×10^{-4}
0.887298	0.609318	0.609318	0.609364	4.7×10^{-5}
1	0.716216	0.716216	0.716166	5.0×10^{-5}

Obtenida de: elaboración propia.

4. Conclusiones: lo que podemos aprender de este artículo

Los resultados presentados en este trabajo muestran que es posible utilizar un microcontrolador PIC para resolver problemas matemáticos, como las ecuaciones diferenciales, aunque no tenga un coprocesador especializado para cálculos numéricos. Esto se logra porque el propio software se encarga de simular las operaciones de punto flotante, que son esenciales en este tipo de cálculos. A pesar de que estos dispositivos tienen recursos limitados, como poca memoria para guardar instrucciones y datos, se demostró que pueden ejecutar algoritmos numéricos con eficacia, siempre que no se excedan sus capacidades internas. Esta experiencia educativa abre la puerta a nuevas formas de enseñanza y aprendizaje, donde los estudiantes pueden ver cómo las matemáticas se conectan con la electrónica y la programación. Además, muestra que es posible trabajar con herramientas de bajo costo para resolver problemas complejos, haciendo más accesible la ciencia y la tecnología.

5. Referencias: por si quieres seguir conociendo más

- Clavijo, J. R. (2011). *Diseño y simulación de sistemas microcontrolados en lenguaje C*. Colombia: MikroElektronika.
- Finlayson, B. A. (1981). *Nonlinear Analysis in Chemical Engineering*. McGraw-Hill.

- Jiménez-Islas, H., y López-Isunza, F. (1994). ELI-COL Programa para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales parciales elípticas, por doble colocación ortogonal. *Avances en Ingeniería Química*, 2, 82-86.
- L. Burden. J. D. Faires, (2011). *Numerical analysis*. Brooks/Cole Cengage Learning.
- Microchip Technology Inc. (2008). *Microchip PIC18F2525/2620/4525/4620 data sheet: 28/40/44-pin enhanced flash microcontrollers with 10-bit A/D and nanoWatt technology*.
<https://ww1.microchip.com/downloads/en/devicedoc/39626e.pdf>
- MikroElektronika. (2009). *MikroC PRO for PIC user manual*. MikroE Software and Hardware Solutions for Embedded World.
<https://download.mikroe.com/documents/compilers/mikroc/pic/mikroc-pic-manual-v101.pdf>
- Sandoval-Hernández, M., Hernández-Méndez, S., Torreblanca-Bouchan, S. E. y Díaz-Arango, G. U. (2021). Actualización de contenidos en el campo disciplinar de matemáticas del componente propedéutico del bachillerato tecnológico: el caso de las funciones especiales. *RIDE. Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo*, 12(23).
- Villadsen, J. V. and Stewart, W.E. (1967). Solution of boundary-value problems by orthogonal collocation. *Chemical Engineering Science*, 22, 1483-1501.
- Villadsen J. V. and Michelsen, M. L, (1978). *Solution of differential equation models by polynomial approximation*. Prentice-Hall International Series.