



Aplicación de la geometría analítica en la planeación de rutas

Mario Alberto Sandoval Hernández

Centro de Bachillerato Tecnológico industrial
y de servicios No. 190,
Boca del Río, Veracruz, México

Fernando Iván Molina Herrera

Tecnológico Nacional de México / IT de
Celaya,
Celaya, Guanajuato, México

Hugo Jiménez Islas *

Tecnológico Nacional de México / IT de
Celaya,
Celaya, Guanajuato, México

Luis Isaí Quemada Villagómez

Tecnológico Nacional de México / IT de
Celaya,
Celaya, Guanajuato, México

* Autor de correspondencia: hugo.jimenez@itcelaya.edu.mx

Resumen: *En este artículo de divulgación educativa se presenta una aplicación de la geometría analítica. Los autores que publican artículos relacionados con la planeación de trayectorias no suelen explicarlo de manera didáctica, pues suponen que el público lector posee un amplio bagaje en el tema. El propósito de este trabajo es mostrar a estudiantes no expertos que los conceptos de la geometría analítica siguen vigentes, con aplicaciones novedosas dentro de la ingeniería.*

Palabras clave: *Análisis numérico, ecuaciones, homotopía con seguimiento hiperesférico, matemática educativa, trazado de rutas.*

1. Introducción: lo que debemos saber de inicio

Para estudiar la geometría analítica es necesario tener conocimientos de geometría plana y del espacio, así como de álgebra. La Geometría analítica es la relación entre el álgebra y la geometría (Garza-Olvera, 1991). En su estudio se estudia el punto en el plano (o en el espacio hablamos de la geometría analítica en el espacio), posteriormente se estudia la línea recta y sus características como la pendiente y las intersecciones con los ejes coordenados. Después

se estudian las cónicas, es decir, la circunferencia, parábola y la elipse, sus ecuaciones, focos, asíntotas (la circunferencia no tiene focos ni asíntotas).

Asimismo, se estudia la traslación y rotación de ejes, entre otros temas que se abordan ahí. El estudio de la geometría analítica es fundamental para el estudio del cálculo, ecuaciones diferenciales y otras disciplinas del área de matemáticas porque se requiere conocer el comportamiento de funciones en dos y en tres dimensiones. La geometría analítica tiene amplias aplicaciones las cuales se encuentran en nuestro entorno inmediato. Por ejemplo, el diseño de las antenas parabólicas tiene su fundamento en la parábola. El receptor de esta antena se encuentra en el foco y es el lugar donde convergen todos los rayos de las señales que llegan, tal como lo describe la definición de esta cónica (Garza-Olvera, 1991). En el área de la electrónica también se encuentran aplicaciones como en el manejo de las pantallas graficas de cuarzo liquido de los distintos dispositivos como calculadoras graficadoras científicas. En general, la geometría analítica cuenta con muchas aplicaciones que los estudiantes ven en su entorno pero que ignoran los fundamentos matemáticos y geométricos. En este trabajo se expone una aplicación de la geometría analítica que en los últimos años está cobrando mucha importancia dentro de la planeación de trayectorias dentro de la robótica (Díaz-Arango et al, 2017). Esta metodología no debe confundirse con la implementación de trayectorias por medio del trazado de una línea en color utilizando pintura o pegando alguna cinta sobre el piso, el cual debe seguir un carrito con sensores ópticos para seguir el patrón. Tampoco debe confundirse con la implementación de sensores ultrasónicos para medir el espacio en el movimiento de algunos robots móviles que tienen el propósito barrer la basura y el polvo en los hogares y en las oficinas y que pueden encontrarse de venta en tiendas de conveniencia y centros comerciales.

2. Fundamentos Teóricos: reglas y principios científicos importantes

Se plantea el desplazamiento de un móvil en un espacio plano, donde cada objeto es representado por una función cerrada, la cual puede ser una circunferencia o forma elíptica, en diferente lugar con distintas dimensiones como un radio más amplio. Se parte de un punto de inicio, el cual es el origen (punto A) y se llega a un punto objetivo (punto B), el cual es el cruce de dos líneas rectas (Díaz-Arango et al 2017). Se trata entonces de generar una trayectoria que comienza en el origen la cual debe ir librando los obstáculos hasta llegar al

objetivo. De esta manera se tiene que un obstáculo en forma de circunferencia está regido por la ecuación de la circunferencia, centro en (x_i, y_i) y radio r_i .

$$C_i(x, y) = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 - r_i^2 = 0 \quad (1)$$

Para obstáculos que tiene una forma rectangular, esta se puede aproximar a una elipse entonces esta puede modelarse por

$$R_i(x, y) = \left(\frac{(x - x_i) \cos(\varphi_i)}{\alpha} \right)^{2\eta} + \left(\frac{(y - y_i) \sin(\varphi_i)}{\beta} \right)^{2\eta} - 1 = 0 \quad (2)$$

Donde η define la forma de las esquinas, (x_i, y_i) representa el centro del objeto, con anchura 2α y altura 2β y φ_i es el ángulo de rotación (Diaz-Arango et al, 2017). Nótese que la ecuación (2) describe una circunferencia si $\cos(\varphi) = \eta = \alpha = \beta = 1$. De esta manera, para describir todos los obstáculos en el plano cartesiano, se deben sumar las ecuaciones que rigen a cada uno de los obstáculos. La fórmula para todos los obstáculos es

$$W(x, y) = \sum_{i=1}^k \frac{p_i}{O_i(x, y)} \quad (3)$$

donde k es el número de obstáculos en el plano cartesiano, p_i es el parámetro de repulsión del i -ésimo obstáculo, $O_i(x, y)$ es el obstáculo descrito por las ecuaciones (1) o (2). El punto B se encuentra dado por el cruce de un sistema de ecuaciones lineales dado por

$$\begin{aligned} L_1(x, y) &= -y - m_1x + (b - m_1a) = 0 \\ L_2(x, y) &= -y - m_2x + (b - m_2a) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

donde m_1 y m_2 son las pendientes de las rectas (a, b) representa el punto de intersección entre las líneas rectas. Este método de planeación de rutas utiliza el efecto de atracción hacia el punto de intersección en B y un efecto de repulsión por los obstáculos. La figura 1 muestra el plano cartesiano con 5 circunferencias que modelan los obstáculos. Esta metodología incorpora los obstáculos $W(x, y)$ como singularidades al sistema de ecuaciones formado por las rectas. Por lo tanto, se obtiene

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= L_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, y) &= L_2(x, y) = W(x, y) - W(a, b) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Note en la ecuación (5) que $W(a, b)$ anula los efectos de las singularidades en el punto B. De las formulaciones de las ecuaciones (1) y (5) es notoria la intervención de las ecuaciones de la recta y la circunferencia visto en geometría analítica (Garza-Olvera, 1991) para el planteamiento de la metodología de planeación de rutas.

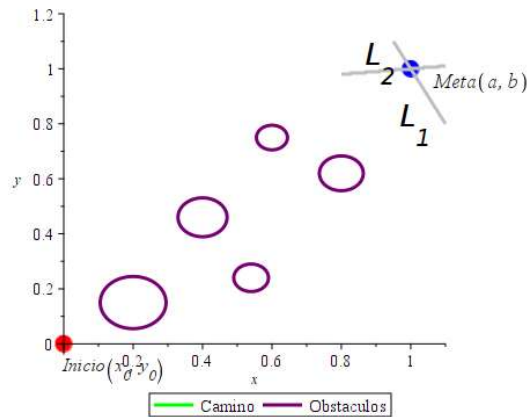


Figura 1. El plano cartesiano en la planeación de rutas.

Obtenida de: elaboración propia.

Para resolver este sistema de ecuaciones, se formula la homotopía de Newton.

$$\begin{aligned} H_1(f_1(x, y), \tau) &= f_1(x, y) - (1 - \tau)f_1(x_0, y_0) = 0 \\ H_2(f_2(x, y), \tau) &= f_2(x, y) - (1 - \tau)f_2(x_0, y_0) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

La formulación un sistema homotópico tiene n ecuaciones y $n + 1$ variables, es decir las n variables más el parámetro de homotopía τ . En este caso, tenemos las variables x, y y el parámetro τ . Después de la formulación homotópica, el problema se convierte en un problema en tres dimensiones. Para realizar el seguimiento debe incorporarse una tercera ecuación, la cual es una esfera, o hipersfera en n dimensiones, esto es

$$S_i(x, y) = (x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 + (\tau - c_\tau)^2 - r^2 = 0 \quad (7)$$

Donde c_x, c_y, c_τ es el centro y r es el radio de la esfera. Incorporando la ecuación (7) con (6) se obtiene el sistema de ecuaciones dado por

$$H_s = \begin{cases} H_1(x, y, \tau) = 0 \\ H_2(x, y, \tau) = 0 \\ S_i(x, y, \tau) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

3. Desarrollo del Trabajo: *aplicando las reglas y principios científicos*

El sistema homotópico (8) debe ser resuelto de manera iterativa para obtener el trazado de la ruta desde el punto A, hasta el punto B. En (Jiménez-Islas, 1996; Díaz-Arango, 2017) se presenta la homotopía de continuación con seguimiento hiperesférico, la cual consiste esencialmente de los siguientes puntos.

1. Formular la homotopía del sistema de ecuaciones. En este caso el sistema (5) es perturbado agregando el parámetro homotópico obteniéndose (6).
2. Se agrega la ecuación de la esfera al sistema (6) para obtener el sistema (8) el cual será resuelto con la continuación numérica. De esta manera el seguimiento con hiperesferas es llevado a cabo.
3. El trazado del camino homotópico es la ruta que el móvil debe seguir. Para ello el camino homotópico consta de dos procedimientos. El primero es la fase de predicción y esto se lleva a cabo con el predictor de Euler (Faires y Burden, 2017). Posteriormente la corrección es llevada a cabo utilizando Newton-Raphson. El proceso se repite de manera iterativa.
4. Conforme se repiten las iteraciones, el parámetro τ va incrementándose. Cuando el parámetro cumple el criterio $t_j < 1$ y $\tau_{j+1} > 1$, entonces debe interpolarse para encontrar la solución $\tau = 1$ obteniéndose el punto B.

La Figura 2 muestra el trazo de la ruta, donde se aprecia cómo se han ido soslayando los obstáculos.

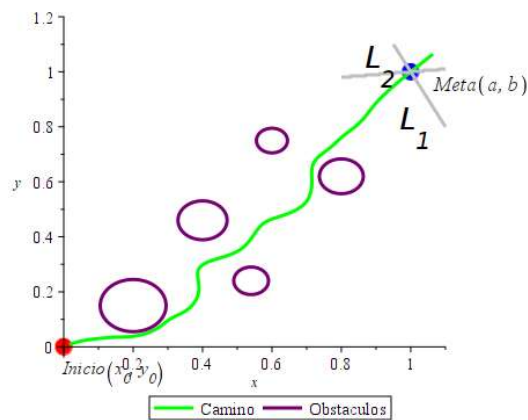


Figura 2. Planeación de rutas.

Obtenida de: elaboración propia.

La planeación de rutas fue implementada en Maple. Para el desarrollo del trazado de rutas se utilizó una computadora con procesador Intel Core i5-7200U con tarjeta gráfica 620 (KBL GT2) y sistema operativo Linux Ubuntu 20.04.06 LTS.

4. Conclusiones: *lo que podemos aprender de este artículo*

En este trabajo se abordó la planeación de rutas enfatizando la importancia educativa que tiene la geometría analítica en este contexto. Los resultados presentados en este trabajo muestran que el trazo obtenido en la figura 1 se ha obtenido resolviendo un sistema de ecuaciones de manera iterativa, aunque de manera numérica. Este hecho mantiene el fundamento que, para encontrar una coordenada en el plano cartesiano, debe resolverse un sistema de ecuaciones. Este algoritmo, al implementarse en un robot móvil, el robot seguirá una ruta librando obstáculos resolviendo un sistema de ecuaciones de manera iterativa hasta llegar al punto final. En esta metodología el móvil se desplazará hacia el punto final buscando el mejor camino que evade obstáculos, siempre en un sentido. Este comportamiento se hace más evidente si el número de obstáculos aumenta cambiando su configuración en el plano, y no debe confundirse con la implementación de sensores en un móvil ya que el móvil si evitara colisionar con obstáculos, pero su trayectoria será errática lo que no garantiza que en un instante determinado logre llegar al punto final.

Se espera que, en un futuro cercano, los estudiantes en etapas tempranas dispongan de más información educativa y tecnológica que les permita contar con una visión más grande de la aplicación de las matemáticas propiciando que se interesen en el estudio de la ciencia y sus aplicaciones.

5. Referencias: *por si quieres seguir conociendo más*

- Díaz-Arango, G., Vázquez-Leal, H., Hernández-Martínez, L., Sanz-Pascual, M. T. y Sandoval-Hernández, M. (2017). Homotopy path planning for terrestrial robots using spherical algorithm. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 15(2). <https://doi.org/10.1109/TASE.2016.2638208>Publis
- Faires, J. D. y Burden R. L. (2017). *Numerical methods* (9na. Edición). Cengage Learning.
- Garza-Olvera, B. (1991). *Matemáticas III Geometría Analítica*, Colección DGETI.

- Jiménez-Islas, H. (1996). SEHPE: programa para la solución de sistemas de ecuaciones no lineales mediante método homotópico con seguimiento hiperesférico. *Avances en Ingeniería Química*, 6(2).
- Sandoval-Hernández, M., Vázquez-Leal, H., Huerta-Chua, J., Castro-González, F. J., y Filobello-Nino, U. A. (2022). Didáctica del graficado de funciones: el caso de las funciones piecewise. *RIDE. Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo*, 12(24).
- Sandoval-Hernandez, M. A., Jimenez-Islas, H., Vazquez-Leal, H., Quemada-Villagómez, M. L., y Lopez-Gonzalez, M. D. L. L. (2025). Exploring homotopy with hyperspherical tracking to find complex roots with application to electrical circuits. *Open Mathematics*, 23(1), 20240115.